

УДК 621.313.3

БУРЯКОВСКИЙ С. Г., к.т.н., доцент,  
 МАСЛИЙ Ар. С., к.т.н., ассистент (Украинский государственный университет железнодорожного транспорта),  
 ЛЮБАРСКИЙ Б. Г., д.т.н., профессор кафедры электрического транспорта и тепловозостроения (Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»),  
 МАСЛИЙ Ан. С., инженер (ООО «Укртрансигнал»)

## Математическая модель работы электропривода стрелочного перевода на базе линейного двигателя

*В статье рассмотрена математическая модель электропривода на базе линейного электродвигателя с учетом потерь в стали, а также с целью дальнейшего ее использования в качестве основного инструмента при исследовании режимов работы в стрелочном переводе.*

*Это позволит получить динамические характеристики машины. Для моделирования в качестве исходных данных взяты параметры линейного двигателя, предложенного в предыдущих работах. Математическое описание линейного электромеханического преобразователя получено из уравнения Лагранжа.*

**Ключевые слова:** линейный двигатель, лагранжиан, обобщенные координаты.

### Введение

Для моделирования электромеханических преобразователей различных типов в настоящее время используются различные подходы [1]. Первый из них моделирование на основе уравнений обобщенного электромеханического преобразователя энергии [2]. При создании таких моделей принимаются допущения о линейности магнитной системы, равномерности (гладкости) воздушного зазора. Эти допущения позволяют создавать модели систем с относительно слабыми нелинейностями. Учет локальных насыщений, которые свойственны современным высокоиспользуемым ЭМП, при таком подходе невозможен. Поэтому широко используемые в настоящее время модели, созданные на этом принципе, имеют значительные погрешности. Однако главным достоинством их является возможность реализовать программно-ориентированные модели, позволяющие проводить расчеты динамических процессов достаточно быстро, а на современном уровне техники - даже близко с реальным временем. Это позволяет использовать их в качестве основы для алгоритмов управления микропроцессорными системами автоматизированных приводов различных типов.

**Целью данной статьи** является получение дифференциальных уравнений, описывающих работу линейного двигателя (ЛД) [3] в стрелочном переводе с учётом потерь в стали.

### Основная часть исследования

Для решения поставленной задачи в первую очередь необходимо выбрать обобщенные механические и электрические координаты этой системы [2] (рис. 1). Выберем следующие обобщенные координаты: обобщенная координата  $q_k$ , обобщенная скорость  $\dot{q}'_k$ , обобщенный импульс силы  $p_k$ , обобщенная сила  $f_k$ .

Особенностью рассматриваемой модели является введение контура вихревых токов  $i_B$  замкнутого на активное сопротивление растеканию токов  $r_B$  в сердечнике (рис. 1).

В нашем случае для электромеханической системы характерны следующие переменные обобщенные электрические координаты  $r, i, e, \psi$  [2], представленные в табл. 1.

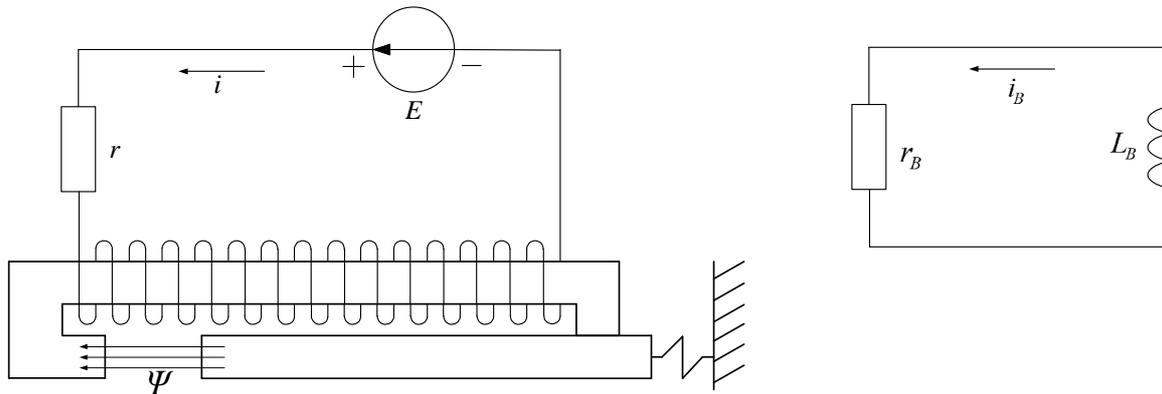


Рис. 1. Схемы замещения линейного двигателя

Таблица 1

Основные энергетические координаты ЛД

Обобщенная координата	Механическая	Электрическая	
	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
$q_k$	$x$	$q$	$q_B$
$\dot{q}'_k$	$v$	$i$	$i_B$
$p_k$	$mv$	$\psi$	$\psi_B$
$-f_k$	0	0	0
$Q_k$	$F_C + 2F_{ПП}$	$E$	0

Если рассматривать действие неконсервативной силы  $Q_k$  по  $k$ -ой координате  $q_k$  совместно с консервативными силами системы, то согласно принципу Даламбера при динамическом равновесии сумма всех сил, включая неконсервативные, должна равняться нулю. Поэтому уравнение Лагранжа [2] имеет следующий вид

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} \right) + Q_k = 0, \quad (1)$$

где  $L$  – силовая функция Лагранжа;  
 $F$  – функция потерь;  
 $Q_k$  – неконсервативные силы.

После определения обобщенных координат выбираем силовую функцию Лагранжа или лагранжиан [2],  $L(q, \dot{q}, t)$ , который будем использовать для получения уравнений движения. Лагранжиан определяется как разность между

кинетической энергией  $T$  и потенциальной энергией  $V$ , т.е.

$$L = T - V. \quad (2)$$

Через обобщенные переменные запишем выражения кинетической и потенциальной энергии для консервативной части системы по следующим уравнениям:

- кинетическая энергия

$$T = \int_{0, \dots, 0}^{q_1, \dots, q_N} \sum_{k=1}^N p_k(q_1, \dots, q_N; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N; t) d\dot{q}_k; \quad (3)$$

- потенциальная энергия

$$V = \int_{0, \dots, 0}^{q_1, \dots, q_N} \sum_{k=1}^N -f_k(q_1, \dots, q_N; t) dq_k. \quad (4)$$

В нашем случае

$$T = \frac{1}{2} \cdot mv^2 + \int_0^i \Psi(i, i_B, x) di + \int_0^{i_B} \Psi_B(i, i_B, x) di_B; \quad (5)$$

$$V = 0. \quad (6)$$

Найдем консервативный лагранжиан по (2)

$$L = T - V = \frac{1}{2} \cdot mv^2 + \int_0^i \Psi(i, i_B, x) di + \int_0^{i_B} \Psi_B(i, i_B, x) di_B. \quad (7)$$

Кроме модификации лагранжиана, позволяющей подсчитать неконсервативные силы, не зависящие от обобщенных координат и скоростей, необходимо также определить неконсервативный кинетический потенциал для подсчета сил рассеяния в системе [2]. Для этого определим функцию F, зависящую от скорости и называемую релеевой функцией рассеяния (потерь) в системе

$$F = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} r_i (\dot{q}_i)^2, \quad (8)$$

где  $r_i$  — параметр рассеивания (потерь).

Запишем релееву функцию потерь для ЛД:

$$F = \frac{1}{2} r i^2 + \frac{1}{2} r_B i_B^2 + \frac{1}{2} \alpha v^2, \quad (9)$$

где  $\alpha$  — коэффициент трения между направляющей и якорем.

Подставляя уравнения (7) и (9) в уравнение Лагранжа (1), можно определить следующие частные производные:

для  $k = 1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_k} &= \frac{\partial \left( \frac{1}{2} \cdot mv^2 \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( \int_0^i \Psi(i, i_B, x) di + \int_0^{i_B} \Psi_B(i, i_B, x) di_B \right)}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial \left( \int_0^i \Psi(i, i_B, x) di \right) + \partial \left( \int_0^{i_B} \Psi_B(i, i_B, x) di_B \right)}{\partial x}, \end{aligned} \quad (10)$$

для  $k = 2$

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{\partial \left( \frac{1}{2} \cdot mv^2 \right)}{\partial q} + \frac{\partial \left( \int_0^i \Psi(i, i_B, x) di + \int_0^{i_B} \Psi_B(i, i_B, x) di_B \right)}{\partial q} = 0, \quad (11)$$

для  $k = 3$

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0,$$

для  $k = 1$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \left( \frac{1}{2} \cdot mv^2 \right)}{\partial v} \right] + \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \left( \int_0^i \Psi(i, i_B, x) di + \int_0^{i_B} \Psi_B(i, i_B, x) di_B \right)}{\partial v} \right] = m \frac{dv}{dt}, \quad (12)$$

для  $k = 2$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \left( \frac{1}{2} \cdot mv^2 \right)}{\partial i} \right] + \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \left( \int_0^i \Psi(i, i_B, x) di + \int_0^{i_B} \Psi_B(i, i_B, x) di_B \right)}{\partial i} \right] =$$

$$= \frac{d\Psi(i, i_B, x)}{dt} + \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \left( \int_0^{i_B} \Psi_B(i, i_B, x) di_B \right)}{\partial i} \right], \quad (13)$$

для  $k = 3$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{d\Psi_B(i, i_B, x)}{dt} + \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \left( \int_0^i \Psi(i, i_B, x) di \right)}{\partial i_B} \right], \quad (14)$$

для  $k = 1$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \left( \frac{1}{2} ri^2 + \frac{1}{2} r_B i_B^2 + \frac{1}{2} \alpha v^2 \right)}{\partial v} = \alpha v, \quad (15)$$

для  $k = 3$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \left( \frac{1}{2} ri^2 + \frac{1}{2} r_B i_B^2 + \frac{1}{2} \alpha v^2 \right)}{\partial i_B} = r_B i_B, \quad (17)$$

для  $k = 2$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \left( \frac{1}{2} ri^2 + \frac{1}{2} r_B i_B^2 + \frac{1}{2} \alpha v^2 \right)}{\partial i} = ri, \quad (16)$$

Подстановка вышеописанного в уравнение Лагранжа (1) дает следующие уравнения для динамической системы ЛД.

для  $k = 1$  (уравнение механического баланса)

$$\left[ \frac{\partial \left( \int_0^i \Psi(i, i_B, x) di \right) + \partial \left( \int_0^{i_B} \Psi_B(i, i_B, x) di_B \right)}{\partial x} - m \frac{dv}{dt} - \alpha v + F_C + 2F_{\text{ПП}} = 0, \right. \quad (18)$$

для  $k = 2$  (уравнение электрического баланса обмотки)

$$- \frac{d\Psi(i, i_B, x)}{dt} - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \left( \int_0^{i_B} \Psi_B(i, i_B, x) di_B \right)}{\partial i} \right] - ri + E = 0, \quad (19)$$

для  $k = 3$  (уравнение, учитывающее потери в стали)

$$\frac{d\Psi_B(i, i_B, x)}{dt} + \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \left( \int_0^i \Psi(i, i_B, x) di \right)}{\partial i_B} \right] + r_B i_B = 0, \quad (20)$$

Таким образом, система уравнений электромеханической системы примет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} E = \frac{d\Psi(i, i_B, x)}{dt} + \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \left( \int_0^{i_B} \Psi_B(i, i_B, x) di_B \right)}{\partial i} \right] + ri; \\ 0 = \frac{d\Psi_B(i, i_B, x)}{dt} + \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \left( \int_0^i \Psi(i, i_B, x) di \right)}{\partial i_B} \right] + r_B i_B; \\ \left[ \frac{\partial \left( \int_0^i \Psi(i, i_B, x) di \right) + \partial \left( \int_0^{i_B} \Psi_B(i, i_B, x) di_B \right)}{\partial x} \right] - \alpha v + F_C + 2F_{\text{ПП}} = m \frac{dv}{dt}; \\ \frac{dx}{dt} = v. \end{array} \right. \quad (21)$$

Заменим

$$\Psi' = \Psi(i, i_B, x) + \frac{\partial \left( \int_0^{i_B} \Psi_B(i, i_B, x) di_B \right)}{\partial i}, \quad (22)$$

$$\Psi'_B = \Psi_B(i, i_B, x) + \frac{\partial \left( \int_0^i \Psi(i, i_B, x) di \right)}{\partial i_B}. \quad (23)$$

В результате уравнения (1 и 2) системы (21) примут следующий вид:

$$\begin{cases} E = \frac{d\Psi'}{dt} + r_i \\ 0 = \frac{d\Psi'_B}{dt} + r_B i_B \end{cases}. \quad (24)$$

Поскольку в нашем случае потокосцепление – это сложная функция, которая зависит от трёх переменных  $(i, i_B, x)$ , то производные потокосцеплений можно представить в таком виде:

$$\begin{cases} E = \frac{\partial \Psi'}{\partial i} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{\partial \Psi'}{\partial i_B} \cdot \frac{di_B}{dt} + \frac{\partial \Psi'}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + r_i; \\ 0 = \frac{\partial \Psi'_B}{\partial i} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{\partial \Psi'_B}{\partial i_B} \cdot \frac{di_B}{dt} + \frac{\partial \Psi'_B}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + r_B i_B; \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases} E - r_i - \frac{\partial \Psi'}{\partial x} \cdot v = \frac{\partial \Psi'}{\partial i} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{\partial \Psi'}{\partial i_B} \cdot \frac{di_B}{dt}; \\ -r_B i_B - \frac{\partial \Psi'_B}{\partial x} \cdot v = \frac{\partial \Psi'_B}{\partial i} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{\partial \Psi'_B}{\partial i_B} \cdot \frac{di_B}{dt}; \end{cases} \quad (26)$$

Решим систему уравнений относительно производных от токов.

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} = & E \left[ \frac{\partial \Psi'_B}{\partial i_B} \cdot \frac{1}{\Delta} \right] + ir \left[ \left( -\frac{\partial \Psi'_B}{\partial i} \right) \cdot \frac{1}{\Delta} \right] + i_B r_B \left[ \frac{\partial \Psi'}{\partial i_B} \cdot \frac{1}{\Delta} \right] + \\ & + v \left[ \left( \frac{\partial \Psi'_B}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Psi'}{\partial i_B} - \frac{\partial \Psi'}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Psi'_B}{\partial i} \right) \cdot \frac{1}{\Delta} \right]; \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{di_B}{dt} = & E \left[ \left( -\frac{\partial \Psi'_B}{\partial i} \right) \cdot \frac{1}{\Delta} \right] + ir \left[ \frac{\partial \Psi'_B}{\partial i} \cdot \frac{1}{\Delta} \right] + \\ & + i_B r_B \left[ \left( -\frac{\partial \Psi'}{\partial i} \right) \cdot \frac{1}{\Delta} \right] + \\ & + v \left[ \left( \frac{\partial \Psi'}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Psi'_B}{\partial i} - \frac{\partial \Psi'_B}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Psi'}{\partial i} \right) \cdot \frac{1}{\Delta} \right]; \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial \Psi'}{\partial i} \cdot \frac{\partial \Psi'_B}{\partial i_B} - \frac{\partial \Psi'_B}{\partial i} \cdot \frac{\partial \Psi'}{\partial i_B}. \quad (29)$$

Такое представление уравнений позволит создать модель электромеханической системы для её дальнейшего исследования.

### **Выводы из исследования, перспективы, дальнейшее развитие в данном направлении**

Разработана математическая модель линейного электромеханического преобразователя на основе решения уравнения Лагранжа для электромеханической системы, которая позволяет учесть потери в стали. Для реализации программно-ориентированной модели электромеханического преобразователя необходимо провести идентификацию ее параметров, что будет проведено авторами в дальнейших работах. Полученная математическая модель может быть использована, как универсальная модель для любого электромагнита.

### **Список использованных источников**

1. Любарский Б.Г. Имитационное моделирование механизма наклона кузова с линейным электромеханическим преобразователем. / Б.Г. Любарский, Д.И. Якунин // МАТЛАБ: материалы V Международной научной конференции (г. Харьков, 11 – 13 мая 2011г.) / сост. В.В. Замаруев. – Харьков: «БЭТ», 2011. – С. 425–436.
2. Уайт Д. Электромеханическое преобразование энергии / Д. Уайт, Г. Вудсон – Москва: Издательство «Энергия», 1964. – с.528.
3. Буряковский С.Г. Расчет тяговой характеристики линейного двигателя для стрелочного перевода / Ар.С. Маслий, Ан.С. Маслий, Б.Г. Любарский, С.Г. Буряковский // Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті. - Харків: УкрДАЗТ. – 2015. – №1(110). – С.83-87.

**Буряковський С. Г., Маслій Ар. С., Любарський Б. Г., Маслій Ан. С.** Математична модель роботи електропривода стрілочного переводу на базі лінійного двигуна. У статті розглянуто математична модель електропривода на базі лінійного електродвигуна з урахуванням магнітних втрат, а також з метою його подальшого використання у якості основного інструменту при дослідженні на математичній моделі режимів роботи в стрілочному переводі.

**Ключові слова:** лінійний двигун, лагранжиан, узагальнені координати.

**Buryakovskiy. S.G., Masliy Ar. S., Lyubarskiy B.G., Masliy An.S.** Mathematical model of turnout electric drive work based on a linear motor. The article considers mathematical model of electric drive work based on a linear motor. Linear motors are electric induction motors that produce motion in a straight line rather than rotational motion. They are now used in all sorts of machines that require linear (as opposed to rotational) motion, including overhead traveling cranes and beltless conveyors for moving sheet metal. They are probably best known as the source of motive power in the latest generation of high-speed magnetic levitation trains, which promise safe travel at very high speeds but are expensive and incompatible with existing railroads. Many designs have been put forward for linear motors, falling into two major categories, low-acceleration and high-acceleration linear motors. Low-acceleration linear motors are suitable for maglev trains and other ground-based transportation applications. High-acceleration linear motors are normally rather short, and are designed to accelerate an object to a very high speed. The mathematical description of linear electromechanical transducer is derived from the Lagrange equations.

**Key words:** linear motor, lagrangian, generalized coordinates.

Рецензент д.т.н., професор кафедри «Прибори и методы неразрушающего контроля» Б.М. Горкунов (НТУ «ХПИ»)

Поступила 06.05.2015г.

**Буряковский С. Г.,** Украинский государственный университет железнодорожного транспорта, к.т.н., доцент кафедры «АСЭТ», Харьков, Украина, [sergbyr@rambler.ru](mailto:sergbyr@rambler.ru)

**Маслий Ар. С.,** Украинский государственный университет железнодорожного транспорта, к.т.н., ассистент кафедры «АСЭТ», Харьков, Украина, [a.masliy@bk.ru](mailto:a.masliy@bk.ru)

**Любарский Б. Г.,** Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», д.т.н., профессор кафедры «Электрического транспорта и тепловозостроения», Харьков, Украина, [lboris19111972@mail.ru](mailto:lboris19111972@mail.ru)

**Маслий Ан. С.,** ООО «Укртрансигнал», инженер, Харьков, Украина, [an\\_com@ukr.net](mailto:an_com@ukr.net)

**Буряковский С. Г.,** Украинский государственный университет железнодорожного транспорта, к.т.н., доцент кафедры «АСЭТ», Харьков, Украина, [sergbyr@rambler.ru](mailto:sergbyr@rambler.ru)

**Маслий Ар. С.,** Украинский государственный университет железнодорожного транспорта, к.т.н., ассистент кафедры «АСЭТ», Харьков, Украина, [a.masliy@bk.ru](mailto:a.masliy@bk.ru)

**Любарский Б. Г.,** Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», д.т.н., профессор кафедры «Электрического транспорта и тепловозобудовання», Харьков, Украина, [lboris19111972@mail.ru](mailto:lboris19111972@mail.ru)

**Маслий Ан. С.,** ТОВ «Укртрансигнал», інженер, Харків, Україна, [an\\_com@ukr.net](mailto:an_com@ukr.net)

**Buryakovskiy. S. G.,** Ukrainian state university of railway transport, k.t.s., associate professor of department «ASET», Kharkiv, Ukraine, [sergbyr@rambler.ru](mailto:sergbyr@rambler.ru)

**Masliy Ar. S.,** Ukrainian state university of railway transport, k.t.s., assistant of department «ASET», Kharkiv, Ukraine, [a.masliy@bk.ru](mailto:a.masliy@bk.ru)

**Lyubarskiy B. G.,** National Technical University "NPI", d.t.s., professor of department «Electric transport», Kharkiv, Ukraine, [lboris19111972@mail.ru](mailto:lboris19111972@mail.ru)

**Masliy An. S.,** OLL «Ukrtransignal», engineer, Kharkiv, Ukraine, [an\\_com@ukr.net](mailto:an_com@ukr.net)