

АНАНЬЕВА О.М., канд. техн. наук,  
 ДАВИДЕНКО М.Г., канд. техн. наук,  
 БАБАЕВ М.М., д-р техн. наук (Украинский государственный университет железнодорожного транспорта)

## Математическая модель двухкомпонентной аддитивной помехи в виде марковского процесса

Рассмотрена статистическая взаимосвязь отсчетов напряжения сигнала непрерывного типа, представляющего собой сумму сигнала и аддитивной двухкомпонентной помехи. Показано, что для получения обозримых результатов рационально представить помеху марковской последовательностью.

**Ключевые слова:** математическая модель, двухкомпонентная помеха, марковская последовательность, функция правдоподобия, статистическая связь, плотность распределения вероятностей.

### Введение

В [1] введена модель помехи, представляющая собой сумму двух компонент, статистические свойства которых позволяют считать временные отсчеты суммарной помехи независимыми случайными величинами. Полученные результаты в части оптимального приема сигнала на фоне такой помехи, строго говоря, могут быть приняты лишь в качестве первого приближения.

### Постановка задачи и анализ исследований

Для корректного решения задачи оптимального приема необходимо учесть статистическую связь между отсчетами входного напряжения приемника. Всеобъемлющий учет такой связи невозможен, ввиду чего в автоматике, теории связи и в радиолокации используют приближенные модели статистической связи, из которых наиболее продуктивной в смысле получения технических решений является модель помехи в виде марковского процесса [2 - 4].

### Основной материал

Применительно к дискретному во времени представлению сигналов и помех марковский процесс принято называть марковской последовательностью [2]. Для нее функция правдоподобия поступившей в обработку реализации  $\vec{u}$  вместо выражения (17) [1] определяется выражением (условную зависимость сомножителей от  $\vec{\lambda}$  опустим)

$$p(\vec{u}|\vec{\lambda}) = p(u_1) \cdot p(u_2|u_1) \cdot p(u_3|u_2) \cdot \dots p(u_k|u_{k-1}), \quad (1)$$

где  $p(u_k|u_{k-1})$  – плотность вероятности существования величины  $u_k$  в момент  $t_k$  при условии, что в предшествующий момент  $t_{k-1}$  имела место величина  $u_{k-1}$ ;  $p(u_1)$  – плотность вероятности существования величины  $u_1$  в начальный момент  $t_1$ .

Введем обозначения  $u_k = x$ ,  $u_{k+n} = u$ . Тогда  $p(u_{k+n}|u_k) = p(u|x)$ . Для однородного во времени марковского процесса справедливо уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова [2, 5]

$$\frac{\partial p(u|x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial u} [a(t, u) \cdot p(u|x)] + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial u^2} [b(t, u) \cdot p(u|x)]. \quad (2)$$

Введя оператор условного математического ожидания  $E\{y|z\}$ , можно дать такое определение коэффициентам этого уравнения:

$$a(t, u) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} E\{[u(t + \Delta t) - u(t)]|u(t) = u\}, \quad (3)$$

$$b(t, u) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} E\{[u(t + \Delta t) - u(t)]^2|u(t) = u\}. \quad (4)$$

Эти коэффициенты называют соответственно коэффициентом сноса и коэффициентом диффузии. При больших величинах  $n$  статистическая связь между отсчетами теряется и можно рассчитать только одномерную плотность вероятности  $p(u)$ , которая теперь является функцией, не зависящей от времени. В силу этого в уравнении (2)  $\frac{\partial p(u|x)}{\partial t} = \frac{\partial p(u)}{\partial t} = 0$  и оно приобретает вид

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d^2}{du^2} [b(u) \cdot p(u)] - \frac{d}{du} [a(u) \cdot p(u)] = 0, \quad (5)$$

где коэффициенты  $a$  и  $b$  теперь тоже не зависят от времени.

Интерпретируя вслед за [2] функцию  $p(u)$  как концентрацию неких условных частиц в точке  $u$  оси, образующей одномерное условное (фазовое) пространство, используем функцию  $\Theta(u)$  для обозначения потока этих частиц через точку  $u$

$$\Theta(u) = a(u) \cdot p(u) - \frac{1}{2} \frac{d}{du} [b(u) \cdot p(u)]. \quad (6)$$

С учетом этого обозначения уравнение (5) приобретает вид

$$\frac{d}{du} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d}{du} [b(u) \cdot p(u)] - a(u) \cdot p(u) \right\} = 0. \quad (7)$$

Содержимое фигурной скобки – это  $[-\Theta(u)]$ , поэтому из (7) получаем, что  $\left[ -\frac{d\Theta(u)}{du} \right] = 0$ , откуда следует, что

$$\Theta(u) = \text{const} = \Theta. \quad (8)$$

Подставив  $\Theta(u) = \Theta$  в выражение (6), получим

$$\frac{d}{du} [b(u) \cdot p(u)] - 2a(u) \cdot p(u) = -2\Theta \quad (9)$$

или

$$p(u) \frac{db(u)}{du} + b(u) \frac{dp(u)}{du} - 2a(u) \cdot p(u) = -2\Theta.$$

Разделим обе части на  $b(u)$ :

$$p(u) \cdot \frac{1}{b(u)} \cdot \frac{db(u)}{du} + \frac{dp(u)}{du} - 2 \frac{a(u)}{b(u)} \cdot p(u) = -\frac{2\Theta}{b(u)}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{dp(u)}{du} + p(u) \left\{ \frac{d[\ln b(u)]}{du} - 2 \frac{a(u)}{b(u)} \right\} = -\frac{2\Theta}{b(u)}. \quad (10)$$

Поскольку при  $u \rightarrow \pm\infty$  поток частиц стремится к нулю (т. к. плотность распределения вероятностей

$$\begin{aligned} p(u) &= \eta \cdot e^{-\ln b(u)} \cdot e^{2 \int \frac{a(u)}{b(u)} du} \cdot e^{[\ln b(\xi) - 2\psi(\xi)]} = \\ &= \frac{\eta}{b(u)} \cdot e^{2 \int \frac{a(u)}{b(u)} du} \cdot e^{[\ln b(\xi) - 2\psi(\xi)]} = \frac{\eta_1(\xi)}{b(u)} \cdot e^{2 \int \frac{a(u)}{b(u)} du}, \end{aligned} \quad (15)$$

$p(u)$  стремится к 0 при  $u \rightarrow \pm\infty$ , что означает отсутствие в бесконечно удаленных точках частиц, образующих поток), то в силу того, что согласно (8)  $\Theta = \text{const}$  имеем, что  $\Theta = 0$  везде в пределах области значений, которые принимает  $u$ . Тогда уравнение (10) приобретает следующий вид:

$$\frac{dp(u)}{du} + p(u) \left\{ \frac{d[\ln b(u)]}{du} - 2 \frac{a(u)}{b(u)} \right\} = g(u), \quad (11)$$

где  $g(u) = 0$ .

Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка, решение которого известно [6]:

$$p(u) = e^{-F(u)} \left( \eta + \int_{\xi}^u g(u) \cdot e^{F(u)} du \right)$$

или, с учетом того, что  $g(u) = 0$

$$p(u) = \eta \cdot e^{-F(u)}, \quad (12)$$

где

$$F(u) = \int_{\xi}^u \left\{ \frac{d[\ln b(u)]}{du} - 2 \frac{a(u)}{b(u)} \right\} du, \quad (13)$$

при этом интегральная кривая  $p(u)$  проходит через точку  $(\xi, \eta)$ .

Найдем  $F(u)$ . Почленно интегрируем содержимое фигурной скобки:

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_{\xi}^u \left\{ \frac{d[\ln b(u)]}{du} \right\} du - 2 \int_{\xi}^u \frac{a(u)}{b(u)} du = \\ &= \ln b(u) - \ln b(\xi) - 2\psi(u) + 2\psi(\xi), \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\psi(x) = \int \frac{a(x)}{b(x)} dx$ .

Выражение (14) можно записать также как

$$F(u) = \ln b(u) - 2 \int \frac{a(u)}{b(u)} du + 2\psi(\xi) - \ln b(\xi).$$

Подставим последнее выражение в (12):

где  $\eta_1(\xi) = \eta \cdot \exp[\ln b(\xi) - 2\psi(\xi)]$ .

Из (15) следует, что численное значение величины  $\xi$  не играет роли, т. к. из условия нормировки  $\int_{-\infty}^{\infty} p(u) du = 1$  находится множитель  $\eta_1(\xi)$  в целом.

Итак, выражение (15) позволяет найти  $p(u) = p(u_{k+n})$  при большом временном интервале  $n \cdot \Delta t$  между начальным моментом времени  $t_k$ , в который плотность  $p(u_k)$ , и моментом  $t_{k+n}$ . Это решение не учитывает статистическую связь (в силу ее полного разрушения за время  $n \cdot \Delta t$ ) между началом

наблюдения и рассматриваемым моментом  $t_{k+n}$  и поэтому не дает ничего нового по сравнению со случаем независимых отсчетов. Чтобы получить продуктивный результат для более общего случая положим, что нам известны условные плотности распределения вероятности  $p_{U1}(u_{1,k+1}; \Delta t | u_{1,k}; \vec{\lambda})$  и  $p_{U2}(u_{2,k+1}; \Delta t | u_{2,k}; \vec{\lambda})$  процессов  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ , введенных в (1), причем каждый из этих процессов является марковским, и оба эти процесса взаимно независимы. Теперь разложение (12) [1] в ряд Тейлора в окрестности точки  $s_{k+1}$  приобретет следующий вид:

$$p_{U1}(u_{1,k+1}; \Delta t | u_{1,k}; \vec{\lambda}) \approx p_{U1}(s_{k+1}; \Delta t | u_{1,k}; \vec{\lambda}) + \frac{1}{2} p''_{U1}(s_{k+1}; \Delta t | u_{1,k}; \vec{\lambda}) \times (u_{1,k+1} - s_{k+1})^2. \quad (16)$$

Подставим (16) в (11) [1] и учтем, что  $p_{U1}(u_{k+1} - u_{2,k+1}) = p_{n1}[u_{k+1} - s_{k+1} - u_{2,k+1}; \Delta t | u_{1,k}; \vec{\lambda}]$ .

Получим, что

$$\begin{aligned} p(u_{k+1}, \Delta t | u_k; \vec{\lambda}) &\approx \int_{-\infty}^{\infty} [p_{U1}(s_{k+1}; \Delta t | u_{1,k}; \vec{\lambda}) + \frac{1}{2} p''_{U1}(s_{k+1}; \Delta t | u_{1,k}; \vec{\lambda}) \times \\ &\times (u_{k+1} - s_{k+1})^2] \cdot p_{U2}(u_{2,k+1}; \Delta t | u_{2,k}) du_{2,k+1} = \\ &= p_{U1}(s_{k+1}; \Delta t | u_{1,k}; \vec{\lambda}) \int_{-\infty}^{\infty} p_{U2}(u_{2,k+1}; \Delta t | u_{2,k}) du_{2,k+1} + \\ &+ \frac{1}{2} p''_{U1}(s_{k+1}; \Delta t | u_{1,k}; \vec{\lambda}) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} [(u_{k+1} - s_{k+1})^2 - 2(u_{k+1} - s_{k+1})u_{2,k+1} + u_{2,k+1}^2] \times \\ &\times p_{U2}(u_{2,k+1}; \Delta t | u_{2,k}) du_{2,k+1}. \end{aligned}$$

Первый интеграл равен единице как интеграл от плотности вероятности, взятый в бесконечных пределах. Тогда

$$\begin{aligned} p(u_{k+1}, \Delta t | u_k; \vec{\lambda}) &\approx p_{U1}(s_{k+1}; \Delta t | u_{1,k}; \vec{\lambda}) + \frac{1}{2} p''_{U1}(s_{k+1}; \Delta t | u_{1,k}; \vec{\lambda}) (u_{k+1} - s_{k+1}) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} p_{U2}(u_{2,k+1}; \Delta t | u_{2,k}) du_{2,k+1} - (u_{k+1} - s_{k+1}) \times \int_{-\infty}^{\infty} u_{2,k+1} p_{U2}(u_{2,k+1}; \Delta t | u_{2,k}) du_{2,k+1} + \\ &+ \frac{1}{2} p''_{U1}(s_{k+1}; \Delta t | u_{1,k}; \vec{\lambda}) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} u_{2,k+1}^2 \cdot p(u_{2,k+1}; \Delta t | u_{2,k}) du_{2,k+1}. \end{aligned} \quad (17)$$

Первый интеграл снова равен единице по той же причине. Второй интеграл представляет собою условное математическое ожидание  $m_2(\Delta t|u_{2,k})$  величины  $u_{2,k+1}$ , а последний интеграл представляет собою условную дисперсию  $\sigma_2^2(\Delta t|u_{2,k})$  этой же величины. Можно приближенно считать, что в окрестностях точки разложение условное математическое ожидание и дисперсия описываются выражениями [2, 5]

$$m_2(\Delta t|u_{2,k}) = u_{2,k} \cdot e^{-\alpha \Delta t}, \quad (18)$$

$$\sigma_2^2(\Delta t|u_{2,k}) = \sigma_2^2(1 - e^{-2\alpha \Delta t}), \quad (19)$$

где  $\alpha$  – некоторая постоянная;  $\sigma_2^2$  – безусловная дисперсия процесса  $u_2(t)$ .

Тогда выражение (17) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} p(u_{k+1}, \Delta t|u_k; \bar{\lambda}) &\approx p_{v1}(s_{k+1}; \Delta t|u_{1,k}; \bar{\lambda}) + \\ &+ \frac{1}{2} p''_{v1}(s_{k+1}; \Delta t|u_{1,k}; \bar{\lambda})(u_{k+1} - s_{k+1})^2 - \\ &- p''_{v1}(s_{k+1}; \Delta t|u_{1,k}; \bar{\lambda})(u_{k+1} - s_{k+1}) \cdot u_{2,k} \cdot e^{-\alpha \Delta t} + \\ &+ \frac{1}{2} p''_{v1}(s_{k+1}; \Delta t|u_{1,k}; \bar{\lambda}) \cdot \sigma_2^2(1 - e^{-2\alpha \Delta t}) = \\ &= p_{v1}(s_{k+1}; \Delta t|u_{1,k}; \bar{\lambda}) + \frac{1}{2} p''_{v1}(s_{k+1}; \Delta t|u_{1,k}; \bar{\lambda}) \cdot u_{k+1}^2 - \\ &- p''_{v1}(s_{k+1}; \Delta t|u_{1,k}; \bar{\lambda})(u_{k+1} - u_{2,k} \cdot e^{-\alpha \Delta t}) \cdot s_{k+1} + \\ &+ \frac{1}{2} p_{v1}(s_{k+1}; \Delta t|u_{1,k}; \bar{\lambda}) \cdot s_{k+1}^2 - \\ &- p''_{v1}(s_{k+1}; \Delta t|u_{1,k}; \bar{\lambda}) \cdot u_{k+1} \cdot u_{2,k} \cdot e^{-\alpha \Delta t} + \\ &+ \frac{1}{2} p''_{v1}(s_{k+1}; \Delta t|u_{1,k}; \bar{\lambda}) \cdot \sigma_2^2(1 - e^{-2\alpha \Delta t}). \quad (20) \end{aligned}$$

Если моменты значения процесса  $u(t)$  во времени  $t_k$  и  $t_{k+1}$  независимы, что имеет место, например, при больших величинах  $\Delta t$ , то имеем  $e^{-\alpha \Delta t} \approx 0$  и, следовательно  $m_2(\Delta t|u_{2,k}) \approx 0$  и  $\sigma_2^2(\Delta t|u_{2,k}) \approx \sigma_2^2$ . При этом выражение (20) превращается в выражение (14) [1] для плотности распределения вероятности независимых отсчетов.

Выражение (20), основанное на аппроксимации (12) [1] плотности распределения вероятности процесса  $u_1(t)$  (8) [1], уже позволяет ввести в рассмотрение статистическую связь между последовательными отсчетами  $u_k$  и  $u_{k+1}$  входного колебания приемного устройства, однако для ее последующего применения для представления функции правдоподобия (1) обрабатываемой

реализации требуется знание отсчетов  $u_{2,k}$  помехового процесса  $u_2(t)$  в отдельности, что далеко не всегда возможно. Чтобы исключить необходимость в такой информации, в дальнейшем перейдем к более сложной аппроксимации функции правдоподобия.

#### Список литературы

1. Ананьева, О.М. Прием сигналов АЛСН в условиях действия двухкомпонентной помехи [Текст] / О.М. Ананьева, М.Г. Давиденко // Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті. – 2015. – № 5. – С. 52-56.
2. Тихонов, В.И. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем [Текст] / В.И. Тихонов, В.Н. Харисов. – М.: Радио и связь, 2004. – 608 с.
3. Сосулин, Ю.Г. Теоретические основы радиолокации и радионавигации [Текст] / Ю.Г. Сосулин. – М.: Радио и связь, 1992. – 304 с.
4. Шахтарин, Б.И. Случайные процессы в радиотехнике: Цикл лекций [Текст] / Б.И. Шахтарин. – М.: Радио и связь, 2000. – 584 с.
5. Свешников, А.А. Прикладные методы теории случайных функций [Текст] / А.А. Свешников. – М.: Наука, 1968. – 464 с.
6. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям [Текст] / Э. Камке. – М.: Наука, 1976. – 576 с.

**О.М. Ананьева, М.Г. Давиденко, М.М. Бабаев.** Математична модель двокомпонентної адитивної завади у вигляді марківського процесу. Розглянутий статистичний взаємозв'язок відліків напруги сигналу безперервного типу, що являє собою суму сигналу й адитивної двокомпонентної завади. Показано, що для одержання доступних для огляду результатів раціонально представити заваду марківською послідовністю.

**Ключові слова:** математична модель, двокомпонентна завада, марківська послідовність, функція правдоподібності, статистичний зв'язок, щільність розподілу ймовірностей.

**O.M. Anan'yeva, M.G. Davidenko, M.M. Babaev.** Mathematical model of a two-component additive noise in the form of a markov process. The hindrance model representing themselves the sum two component which statistical properties allow to consider temporary counting of a total hindrance as independent random variables is considered. It is shown that for the correct solution of a problem of optimum reception of signals it is necessary to consider statistical communication between counting of entrance tension of the receiver. The statistical interrelation

of counting of tension of a signal of the continuous type representing the sum of a signal and additive two-component hindrance is investigated. It is offered to represent for receiving foreseeable results a hindrance Markov sequence. Possibility of square approximation of the resulting credibility function is investigated. However it appeared that the received expression includes inaccessible information on a hindrance. The conclusion is drawn that it is necessary to apply more difficult approximation of function of credibility to overcoming of it.

**Keywords:** mathematical model, two-component hindrance, Markov sequence, credibility function, statistical communication, density of distribution of probabilities.

*Надійшла 30.06.2016 р.*

**Ананьева О.М.**, кандидат технических наук, докторант кафедры автоматики и компьютерного телеуправления движением поездов Украинского государственного университета железнодорожного транспорта. Харьков, Украина. Тел.: (057) 730-19-96. E-mail: eltech@kart.edu.ua

**Давиденко М.Г.**, кандидат технических наук, доцент кафедры электротехники и электрических машин Украинского государственного университета железнодорожного транспорта. Харьков, Украина. Тел.: (057) 730-19-96. E-mail: eltech@kart.edu.ua

**Бабаев М.М.**, доктор технических наук, профессор кафедры электротехники и электрических машин Украинского государственного университета железнодорожного транспорта. Харьков, Украина. Тел.: (057) 730-19-96. E-mail: eltech@kart.edu.ua

**Anan'yeva O.**, Candidate of Technical Sciences, doctoral student of department of automation and computer telecontrol train traffic Ukrainian state university of railway transport. Kharkiv, Ukraine. Ph.: (057) 730-19-96. E-mail: eltech@kart.edu.ua

**Davidenko M.**, Candidate of Technical Sciences, associate professor of department of electrical equipment and electrical machines Ukrainian state university of railway transport. Kharkiv, Ukraine. Ph.: (057) 730-19-96. E-mail: eltech@kart.edu.ua

**Babaev M.**, Doctor of Engineering, professor of department of electrical equipment and electrical machines Ukrainian State University of Railway Transport, Kharkiv, Ukraine. Тел.: (057) 730-19-96. E-mail: eltech@kart.edu.ua