УДК 621.391:681.518

АНАНЬЕВА О.М., канд. техн. наук,
ДАВИДЕНКО М.Г., канд. техн. наук,
БАБАЕВ М.М., д-р техн. наук (Украинский государственный университет железнодорожного транспорта)

Математическая модель двухкомпонентной аддитивной помехи в виде марковского процесса

Рассмотрена статистическая взаимосвязь отсчетов напряжения сигнала непрерывного типа, представляющего собой сумму сигнала и аддитивной двухкомпонентной помехи. Показано, что для получения обозримых результатов рационально представить помеху марковской последовательностью.
Ключевые слова: *математическая модель, двухкомпонентная помеха, марковская последовательность, функция правдоподобия, статистическая связь, плотность распределения вероятностей.*

Введение

В [1] введена модель помехи, представляющая собой сумму двух компонент, статистические свойства которых позволяют считать временные отсчеты суммарной помехи независимыми случайными величинами. Полученные результаты в части оптимального приема сигнала на фоне такой помехи, строго говоря, могут быть приняты лишь в качестве первого приближения.

Постановка задачи и анализ исследований

Для корректного решения задачи оптимального приема необходимо учесть статистическую связь между отсчетами входного напряжения приемника. Всеобъемлющий учет такой связи невозможен, ввиду чего в автоматике, теории связи и в радиолокации используют приближенные модели статистической связи, из которых наиболее продуктивной в смысле получения технических решений является модель помехи в виде марковского процесса [2 - 4].

Основной материал

Применительно к дискретному во времени представлению сигналов и помех марковский процесс принято называть марковской последовательностью [2]. Для нее функция правдоподобия поступившей в обработку реализации $\vec{u}$ вместо выражения (17) [1] определяется выражением (условную зависимость сомножителей от $\vec{\lambda}$ опустим)

$$p(\vec{u}|\vec{\lambda}) = p(u_1)\cdot p(u_2|u_1)\cdot p(u_3|u_2)\cdot \ldots p(u_k|u_{k-1}), \quad (1)$$

где $p(u_k|u_{k-1})$ – плотность вероятности существования величины u_i в момент t_k при условии, что в предшествующий момент t_{k-1} имела место величина u_{k-1}; $p(u_1)$ – плотность вероятности существования величины u_1 в начальный момент t_1.

Введем обозначения $u_k = x$, $u_{k+n} = u$. Тогда $p(u_{k+n}|u_k) = p(u|x)$. Для однородного во времени марковского процесса справедливо уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова [2, 5]

$$\frac{\partial p(u|x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial u}[a(t,u)\cdot p(u|x)] + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial u^2}[b(t,u)\cdot p(u|x)]. \quad (2)$$

Введя оператор условного математического ожидания $E\{y|z\}$, можно дать такое определение коэффициентам этого уравнения:

$$a(t,u) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}E\{[u(t+\Delta t)-u(t)]|u(t)=u\}, \quad (3)$$

$$b(t,u) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}E\{[u(t+\Delta t)-u(t)]^2|u(t)=u\}. \quad (4)$$

Эти коэффициенты называют соответственно коэффициентом сноса и коэффициентом диффузии. При больших величинах n статистическая связь между отсчетами теряется и можно рассчитать только одномерную плотность вероятности $p(u)$, которая теперь является функцией, не зависящей от времени. В силу этого в уравнении (2) $\frac{\partial p(u|x)}{\partial t} = \frac{\partial p(u)}{\partial t} = 0$ и оно приобретает вид

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d^2}{du^2}[b(u)\cdot p(u)] - \frac{d}{du}[a(u)\cdot p(u)] = 0, \quad (5)$$

где коэффициенты a и b теперь тоже не зависят от времени.

Интерпретируя вслед за [2] функцию $p(u)$ как концентрацию неких условных частиц в точке u оси, образующей одномерное условное (фазовое) пространство, используем функцию $\Theta(u)$ для обозначения потока этих частиц через точку u

$$\Theta(u) = a(u) \cdot p(u) - \frac{1}{2}\frac{d}{du}[b(u) \cdot p(u)]. \quad (6)$$

С учетом этого обозначения уравнение (5) приобретает вид

$$\frac{d}{du}\left\{\frac{1}{2}\frac{d}{du}[b(u) \cdot p(u)] - a(u) \cdot p(u)\right\} = 0. \quad (7)$$

Содержимое фигурной скобки – это $[-\Theta(u)]$, поэтому из (7) получаем, что $\left[-\frac{d\Theta(u)}{du}\right] = 0$, откуда следует, что

$$\Theta(u) = const = \Theta. \quad (8)$$

Подставив $\Theta(u) = \Theta$ в выражение (6), получим

$$\frac{d}{du}[b(u) \cdot p(u)] - 2a(u) \cdot p(u) = -2\Theta \quad (9)$$

или

$$p(u)\frac{db(u)}{du} + b(u)\frac{dp(u)}{du} - 2a(u) \cdot p(u) = -2\Theta.$$

Разделим обе части на $b(u)$:

$$p(u) \cdot \frac{1}{b(u)} \cdot \frac{db(u)}{du} + \frac{dp(u)}{du} - 2\frac{a(u)}{b(u)} \cdot p(u) = -\frac{2\Theta}{b(u)}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{dp(u)}{du} + p(u)\left\{\frac{d[\ln b(u)]}{du} - 2\frac{a(u)}{b(u)}\right\} = -\frac{2\Theta}{b(u)}. \quad (10)$$

Поскольку при $u \to \pm\infty$ поток частиц стремится к нулю (т. к. плотность распределения вероятностей $p(u)$ стремится к 0 при $u \to \pm\infty$, что означает отсутствие в бесконечно удаленных точках частиц, образующих поток), то в силу того, что согласно (8) $\Theta = const$ имеем, что $\Theta = 0$ везде в пределах области значений, которые принимает u. Тогда уравнение (10) приобретает следующий вид:

$$\frac{dp(u)}{du} + p(u)\left\{\frac{d[\ln b(u)]}{du} - 2\frac{a(u)}{b(u)}\right\} = g(u), \quad (11)$$

где $g(u) = 0$.

Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка, решение которого известно [6]:

$$p(u) = e^{-F(u)}\left(\eta + \int_{\xi}^{u} g(u) \cdot e^{F(u)} du\right)$$

или, с учетом того, что $g(u) = 0$

$$p(u) = \eta \cdot e^{-F(u)}, \quad (12)$$

где

$$F(u) = \int_{\xi}^{u}\left\{\frac{d[\ln b(u)]}{du} - 2\frac{a(u)}{b(u)}\right\} du, \quad (13)$$

при этом интегральная кривая $p(u)$ проходит через точку (ξ, η).

Найдем $F(u)$. Почленно интегрируем содержимое фигурной скобки:

$$F(u) = \int_{\xi}^{u}\left\{\frac{d[\ln b(u)]}{du}\right\}du - 2\frac{a(u)}{b(u)}du =$$
$$= \ln b(u) - \ln b(\xi) - 2\psi(u) + 2\psi(\xi), \quad (14)$$

где $\psi(x) = \int \frac{a(x)}{b(x)}dx$.

Выражение (14) можно записать также как

$$F(u) = \ln b(u) - 2\int \frac{a(u)}{b(u)}du + 2\psi(\xi) - \ln b(\xi).$$

Подставим последнее выражение в (12):

$$p(u) = \eta \cdot e^{-\ln b(u)} \cdot e^{2\int \frac{a(u)}{b(u)}du} \cdot e^{[\ln b(\xi) - 2\psi(\xi)]} =$$
$$= \frac{\eta}{b(u)} \cdot e^{2\int \frac{a(u)}{b(u)}du} \cdot e^{[\ln b(\xi) - 2\psi(\xi)]} = \frac{\eta_1(\xi)}{b(u)} \cdot e^{2\int \frac{a(u)}{b(u)}du}, \quad (15)$$

где $\eta_1(\xi) = \eta \cdot exp[\ln b(\xi) - 2\psi(\xi)]$.

Из (15) следует, что численное значение величины ξ не играет роли, т. к. из условия нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} p(u)du = 1$ находится множитель $\eta_1(\xi)$ в целом.

Итак, выражение (15) позволяет найти $p(u) = p(u_{k+n})$ при большом временном интервале $n \cdot \Delta t$ между начальным моментом времени t_k, в который плотность $p(u_k)$, и моментом t_{k+n}. Это решение не учитывает статистическую связь (в силу ее полного разрушения за время $n \cdot \Delta t$) между началом наблюдения и рассматриваемым моментом t_{k+n} и поэтому не дает ничего нового по сравнению со случаем независимых отсчетов. Чтобы получить продуктивный результат для более общего случая положим, что нам известны условные плотности распределения вероятности $p_{U1}(u_{1,k+1}; \Delta t | u_{1,k}; \vec{\lambda})$ и $p_{U2}(u_{2,k+1}; \Delta t | u_{2,k}; \vec{\lambda})$ процессов $u_1(t)$ и $u_2(t)$, введенных в (1), причем каждый из этих процессов является марковским, и оба эти процесса взаимно независимы. Теперь разложение (12) [1] в ряд Тейлора в окрестности точки s_{k+1} приобретет следующий вид:

$$p_{U1}(u_{1,k+1}; \Delta t | u_{1,k}; \vec{\lambda}) \approx p_{U1}(s_{k+1}; \Delta t | u_{1,k}; \vec{\lambda}) + \frac{1}{2} p''_{U1}(s_{k+1}; \Delta t | u_{1,k}; \vec{\lambda}) \times$$
$$\times (u_{1,k+1} - s_{k+1})^2. \qquad (16)$$

Подставим (16) в (11) [1] и учтем, что $p_{U1}(u_{k+1} - u_{2,k+1}) = p_{n1}[u_{k+1} - s_{k+1} - u_{2,k+1}; \Delta t | u_{1,k}; \vec{\lambda}]$.

Получим, что

$$p(u_{k+1}, \Delta t | u_k; \vec{\lambda}) \approx \int_{-\infty}^{\infty} [p_{U1}(s_{k+1}; \Delta t | u_{1,k}; \vec{\lambda}) + \frac{1}{2} p''_{U1}(s_{k+1}; \Delta t | u_{1,k}; \vec{\lambda}) \times$$
$$\times (u_{k+1} - s_{k+1})^2] \cdot p_{U2}(u_{2,k+1}; \Delta t | u_{2,k}) du_{2,k+1} =$$
$$= p_{U1}(s_{k+1}; \Delta t | u_{1,k}; \vec{\lambda}) \int_{-\infty}^{\infty} p_{U2}(u_{2,k+1}; \Delta t | u_{2,k}) du_{2,k+1} +$$
$$+ \frac{1}{2} p''_{U1}(s_{k+1}; \Delta t | u_{1,k}; \vec{\lambda}) \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \left[(u_{k+1} - s_{k+1})^2 - 2(u_{k+1} - s_{k+1}) u_{2,k+1} + u_{2,k+1}^2\right] \times$$
$$\times p_{U2}(u_{2,k+1}; \Delta t | u_{2,k}) du_{2,k+1}.$$

Первый интеграл равен единице как интеграл от плотности вероятности, взятый в бесконечных пределах. Тогда

$$p(u_{k+1}, \Delta t | u_k; \vec{\lambda}) \approx p_{U1}(s_{k+1}; \Delta t | u_{1,k}; \vec{\lambda}) + \frac{1}{2} p''_{U1}(s_{k+1}; \Delta t | u_{1,k}; \vec{\lambda})(u_{k+1} - s_{k+1}) \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} p_{U2}(u_{2,k+1}; \Delta t | u_{2,} \vec{\lambda}) du_{2,k+1} - (u_{k+1} - s_{k+1}) \times \int_{-\infty}^{\infty} u_{2,k+1} p_{U2}(u_{2,k+1}; \Delta t | u_{2,k}) du_{2,k+1} +$$
$$+ \frac{1}{2} p''_{U1}(s_{k+1}; \Delta t | u_{1,k}; \vec{\lambda}) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} u_{2,k+1}^2 \cdot p(u_{2,k+1}; \Delta t | u_{2,k}) du_{2,k+1}. \qquad (17)$$

Первый интеграл снова равен единице по той же причине. Второй интеграл представляет собою условное математическое ожидание $m_2(\Delta t|u_{2,k})$ величины $u_{2,k+1}$, а последний интеграл представляет собою условную дисперсию $\sigma_2^2(\Delta t|u_{2,k})$ этой же величины. Можно приближенно считать, что в окрестностях точки разложение условное математическое ожидание и дисперсия описываются выражениями [2, 5]

$$m_2(\Delta t|u_{2,k}) = u_{2,k} \cdot e^{-\alpha\Delta t}, \tag{18}$$

$$\sigma^2(\Delta t|u_{2,k}) = \sigma_2^2(1 - e^{-2\alpha\Delta t}), \tag{19}$$

где α – некоторая постоянная; σ_2^2 – безусловная дисперсия процесса $u_2(t)$.

Тогда выражение (17) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&p(u_{k+1},\Delta t|u_k;\vec{\lambda}) \approx p_{U1}(s_{k+1};\Delta t|u_{1,k};\vec{\lambda}) + \\
&+\frac{1}{2}p''_{U1}(s_{k+1};\Delta t|u_{1,k};\vec{\lambda})(u_{k+1} - s_{k+1})^2 - \\
&-p''_{U1}(s_{k+1};\Delta t|u_{1,k};\vec{\lambda})(u_{k+1} - s_{k+1}) \cdot u_{2,k} \cdot e^{-\alpha\Delta t} + \\
&+\frac{1}{2}p''_{U1}(s_{k+1};\Delta t|u_{1,k};\vec{\lambda}) \cdot \sigma_2^2(1 - e^{-2\alpha\Delta t}) = \\
&= p_{U1}(s_{k+1};\Delta t|u_{1,k};\vec{\lambda}) + \frac{1}{2}p''_{U1}(s_{k+1};\Delta t|u_{1,k};\vec{\lambda}) \cdot u_{k+1}^2 - \\
&-p''_{U1}(s_{k+1};\Delta t|u_{1,k};\vec{\lambda})(u_{k+1} - u_{2,k} \cdot e^{-\alpha\Delta t}) \cdot s_{k+1} + \\
&+\frac{1}{2}p_{U1}(s_{k+1};\Delta t|u_{1,k};\vec{\lambda}) \cdot s_{k+1}^2 - \\
&-p''_{U1}(s_{k+1};\Delta t|u_{1,k};\vec{\lambda}) \cdot u_{k+1} \cdot u_{2,k} \cdot e^{-\alpha\Delta t} + \\
&+\frac{1}{2}p''_{U1}(s_{k+1};\Delta t|u_{1,k};\vec{\lambda}) \cdot \sigma_2^2(1 - e^{-2\alpha\Delta t}).
\end{aligned} \tag{20}$$

Если моменты значения процесса $u(t)$ во времени t_k и t_{k+1} независимы, что имеет место, например, при больших величинах Δt, то имеем $e^{-\alpha\Delta t} \approx 0$ и, следовательно $m_2(\Delta t|u_{2,k}) \approx 0$ и $\sigma^2(\Delta t|u_{2,k}) \approx \sigma_2^2$. При этом выражение (20) превращается в выражение (14) [1] для плотности распределения вероятности независимых отсчетов.

Выражение (20), основанное на аппроксимации (12) [1] плотности распределения вероятности процесса $u_1(t)$ (8) [1], уже позволяет ввести в рассмотрение статистическую связь между последовательными отсчетами u_k и u_{k+1} входного колебания приемного устройства, однако для ее последующего применения для представления функции правдоподобия (1) обрабатываемой реализации требуется знание отсчетов $u_{2,k}$ помехового процесса $u_2(t)$ в отдельности, что далеко не всегда возможно. Чтобы исключить необходимость в такой информации, в дальнейшем перейдем к более сложной аппроксимации функции правдоподобия.

Список литературы

1. Ананьева, О.М. Прием сигналов АЛСН в условиях действия двухкомпонентной помехи [Текст] / О.М. Ананьева, М.Г. Давиденко // Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті. – 2015. – № 5. – С. 52-56.
2. Тихонов, В.И. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем [Текст] / В.И. Тихонов, В.Н. Харисов. – М.: Радио и связь, 2004. – 608 с.
3. Сосулин, Ю.Г. Теоретические основы радиолокации и радионавигации [Текст] / Ю.Г. Сосулин. – М.: Радио и связь, 1992. – 304 с.
4. Шахтарин, Б.И. Случайные процессы в радиотехнике: Цикл лекций [Текст] / Б.И. Шахтарин. – М.: Радио и связь, 2000. – 584 с.
5. Свешников, А.А. Прикладные методы теории случайных функций [Текст] / А.А. Свешников. – М.: Наука, 1968. – 464 с.
6. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям [Текст] / Э. Камке. – М.: Наука, 1976. – 576 с.

О.М. Ананьєва, М.Г. Давиденко, М.М. Бабаєв. Математична модель двокомпонентної адитивної завади у вигляді марківського процесу. Розглянутий статистичний взаємозв'язок відліків напруги сигналу безперервного типу, що являє собою суму сигналу й адитивної двокомпонентної завади. Показано, що для одержання доступних для огляду результатів раціонально представити заваду марківською послідовністю.

Ключові слова: математична модель, двокомпонентна завада, марківська послідовність, функція правдоподібності, статистичний зв'язок, щільність розподілу ймовірностей.

O.M. Anan'yeva, M.G. Davidenko, M.M. Babaev. Mathematical model of a two-component additive noise in the form of a markov process. The hindrance model representing themselves the sum two component which statistical properties allow to consider temporary counting of a total hindrance as independent random variables is considered. It is shown that for the correct solution of a problem of optimum reception of signals it is necessary to consider statistical communication between counting of entrance tension of the receiver. The statistical interrelation of counting of tension of a signal of the continuous type representing the sum of a signal and additive two-component hindrance is investigated. It is offered to represent for receiving foreseeable results a hindrance Markov sequence. Possibility of square approximation of the resulting credibility function is investigated. However it appeared that the received expression includes inaccessible information on a hindrance. The conclusion is drawn that it is necessary to apply more difficult approximation of function of credibility to overcoming of it.

Keywords: mathematical model, two-component hindrance, Markov sequence, credibility function, statistical communication, density of distribution of probabilities.

Надійшла 30.06.2016 р.

Ананьева О.М., *кандидат технических наук, докторант кафедры автоматики и компьютерного телеуправления движением поездов Украинского государственного университета железнодорожного транспорта. Харьков, Украина. Тел.: (057) 730-19-96. E-mail: eltech@kart.edu.ua*

Давиденко М.Г., *кандидат технических наук, доцент кафедры электротехники и электрических машин Украинского государственного университета железнодорожного транспорта. Харьков, Украина. Тел.: (057) 730-19-96. E-mail: eltech@kart.edu.ua*

Бабаев М.М., *доктор технических наук, профессор кафедры электротехники и электрических машин Украинского государственного университета железнодорожного транспорта. Харьков, Украина. Тел.: (057) 730-19-96. E-mail: eltech@kart.edu.ua*

Anan'yeva O., *Candidate of Technical Sciences, doctoral student of department of automation and computer telecontrol train traffic Ukrainian state university of railway transport. Kharkiv, Ukraine. Ph.: (057) 730-19-96. E-mail:eltech@kart.edu.ua*

Davidenko M., *Candidate of Technical Sciences, associate professor of department of electrical equipment and electrical machines Ukrainian state university of railway transport. Kharkiv, Ukraine. Ph.: (057) 730-19-96. E-mail: eltech@kart.edu.ua*

Babaev M., *Doctor of Engineering, professor of department of electrical equipment and electrical machines Ukrainian State University of Railway Transport, Kharkiv, Ukraine. Тел.: (057) 730-19-96. E-mail: eltech@kart.edu.ua*