УДК 625.144.1

DOI: 10.18664/ikszt.v0i2.101745

ДАРЕНСКИЙ А. Н., д.т.н, профессор,
ЛЕЙБУК Я. С., аспирант кафедры «Путь и путевое хозяйство» (УкрГУЖТ)

Математическая модель колебаний железнодорожного пути как балки, которая имеет инерционные характеристики

Разработана математическая модель колебаний железнодорожного пути, в основу которой положена расчетная схема пути в виде балок на многих упруго-диссипативных опорах. В отличие от разработанных ранее моделей учтена распределенная масса пути. Это позволяет применять предлагаемую модель, в том числе для расчетов сил взаимодействия пути и подвижного состава, а также для условий скоростного и высокоскоростного движения.

Ключевые слова: *балка на многих упруго-диссипативных опорах, свободные и вынужденные колебания.*

Введение

В настоящее время основной расчетной схемой, которая используется при расчетах как динамики взаимодействия пути и подвижного состава, так и при расчетах прочности элементов пути, является схема балки на сплошном упругом основании. Причиной использования такой расчетной схемы, которая впервые была предложена в начале XX века профессором С.П. Тимошенко, были вычислительные сложности, которые возникают при использовании схемы пути в виде балки на многих упругих опорах. Так, для расчета колебаний пути при использовании схемы балки на 10 упругих опорах нужно решать совместно 10 дифференциальных уравнений четвертой степени, тогда как при использовании схемы балки на сплошном упругом основании достаточно одного такого уравнения. Практически до конца XX века применение схемы пути как балки на многих упругих опорах было невозможно в связи с отсутствием мощной техники. Однако применение балки на сплошном упругом основании вызывает необходимость принятия предпосылок и допущений, которые чрезмерно идеализируют путь и его техническое состояние. Так, введение в расчеты термина «модуль упругости» предполагает двухстороннюю реакцию пути в точке контакта колеса и рельса. Модуль упругости подрельсового основания является величиной постоянной, не зависящей от величины действующей силы. При расчетах пространственных сил взаимодействия применяется принцип суперпозиции, а полученные результаты объединяются. По мнению ряда ученых, например профессора Першина С. П. [12], такие допущения вносят существенные погрешности и при сохранении традиционной конструкции пути, при которой рельсы опираются на отдельные шпалы, возврат к расчетной схеме в виде балок на многих упругих опорах неизбежен.

Постановка проблемы в общем виде

На основании анализа исследований и публикаций по вопросам моделирования взаимодействия пути и подвижного состава можно сформулировать проблему исследований, которая состоит в следующем: «Применение моделей пути в виде балки на сплошном упругом основании может давать, в некоторых условиях, существенные погрешности в расчетах, а применение моделей и методов расчета с использованием схемы пути в виде балки на многих упруго-диссипативных опорах ограничивается тем, что при высоких скоростях движения необходимо учитывать массу пути, которая участвует в колебаниях.

Анализ последних исследований и публикаций

Разработкой моделей и методов расчетов силы взаимодействия пути и подвижного состава и расчетов прочности пути с использованием расчетной схемы в виде балки на сплошном упругом основании занимались такие ученые, как Бромберг Е. М. [1], Вериго М. Ф. [2], Даниленко Э. И. [3], Коган А. Я. [4], Шахунянц Г. М. [5] и многие другие. Однако профессора Волошко Ю. В. [6], Рыбкин В. В. [7], Яковлев В. Ф. в своих работах показали, что применение такой схемы при расчетах усилий, действующих в рельсах, дает результаты меньше на 12-25 % по сравнению с расчетами при применении расчетной схемы балки на многих упругих опорах.

Авторами [8] для условий дорог необщего пользования предложены модели и методы расчетов сил взаимодействия пути и подвижного состава и расчетов напряженно-деформированного состояния элементов пути с использованием пространственной модели «экипаж - путь», при которой путь рассматривался на многих упругих опорах с нелинейными упруго-диссипативными характеристиками. Поскольку эти модели и методы были предложены для условий дорог необщего пользования, где скорости движения подвижного состава невелики, инерционные характеристики пути не рассматривались. Однако для условий магистральных железных дорог такое допущение неприменимо.

Определение цели и задачи исследования

Целью исследования является разработка математической модели колебания пути под действием переменной нагрузки при использовании расчетной схемы пути как балки на многих упруго-диссипативных опорах с учетом инерционных характеристик пути. Для достижения этой цели в работе решены следующие задачи:

1) получены общие уравнения свободных колебаний балки, имеющей равномерно и неравномерно распределенную массу;

2) полученны уравнения вынужденных колебаний балки, которая имеет равномерно распределенную массу;

3) составлено дифференциальное уравнение поперечных колебаний рельса.

Основной материал исследований

Балки с распределенной массой представляют собой систему с бесконечным количеством степеней свободы. Её положение в любой момент времени определяется упругой линией, которая при динамических нагрузках описывается функцией двух переменных: координаты сечения x и времени t, т.е.:

$$y = f(x,t), \qquad (1)$$

Дифференциальная зависимость между кривизной упругой линии и изгибающим моментом при положительных прогибах бруса, направленных вниз, как известно, имеет вид:

$$EI(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -M(x,t). \qquad (2)$$

Дифференцируем дважды это выражение по x:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] = \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -p(x,t) \qquad (3)$$

,

где $p(x,t)$ – действующая на брус поперечная нагрузка, направленная снизу вверх (положительное направление).

Во время движения бруса распределенная нагрузка $p(x,t)$ в общем случае состоит из нагрузок следующих видов: активной заданной нагрузки $q(x,t)$; инерционных сил $m(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, если пренебречь продольными смещениями сечений, их поворотами и сдвигами сил сопротивления движению $p^*(x,t)$, можно записать:

$$p(x,t) = q(x,t) + m(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + p^*(x,t). \qquad (4)$$

Подставляя выражение (4) в формулу (2), получим:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] + m(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + p^*(x,t) = -q(x,t)$$

. (5)

Это и есть дифференциальное уравнение поперечного движения бруса переменного сечения в общем виде. Оно линейно с переменными коэффициентами, не зависящими от действующей нагрузки. Поэтому для исследования движения $y(x,t)$ может быть применен принцип независимости действия сил. Дифференциальное уравнение достаточно точно описывает поведение балки при не очень быстрых воздействиях (не мгновенных) и широко используется при решении многих динамических задач.

Будем в дальнейшем рассматривать балку с постоянной жесткостью EJ = const и равномерно распределенной массой m. Тогда дифференциальное уравнение принимает следующий вид:

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -q(x,t). \qquad (6)$$

Дифференциальное уравнение свободных колебаний получим из этого уравнения, полагая в нем $q(x,t)=0$:

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \qquad (7)$$

Свободные колебания балки. Решение дифференциального уравнения будем искать в следующем виде:

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(x)\Phi_k(t),$$

где $y_k(x)$ – функция, зависящая только от x; $\Phi_k(t)$ – функция, зависящая от времени t.

Подставим в исходное уравнение:

$$EI\frac{\partial^4}{\partial x^4}\left[\sum_{k=1}^{\infty} y_k(x)\Phi_k(t)\right]+m\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\sum_{k=1}^{\infty} y_k(x)\Phi_k(t)\right]=0 \tag{8}$$

Приравняем нулю одноименные слагаемые:

$$EI\frac{\partial^4 y_k}{\partial x^4}\Phi_k(t)+m\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial t^2}y_k(x)=0. \tag{9}$$

Разделим это уравнение почленно на произведение функций $m\cdot y_k(x)\cdot\Phi_k(t)$:

$$\frac{EI\dfrac{\partial^4 y_k}{\partial x^4}}{my_k(x)}=-\frac{\dfrac{\partial^2\Phi_k}{\partial t^2}}{\Phi_k(t)}. \tag{10}$$

Из полученного равенства видно, что левая часть не зависит от t, а первая – от x. Это позволяет каждую из них приравнять постоянной величине, которую обозначим ω_k^2. После этого получим два независимых друг от друга уравнения. Этот процесс называется процессом разделения переменных:

$$\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial t^2}+\omega_k^2\Phi_k(t)=0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial^4 y_k}{\partial x^4}-s_k^4 y_k=0.$$

Здесь ω_k – частота свободных колебаний для k-й формы; s_k^4 – характеристическое число:

$$s_k^4=\frac{m\omega_k^2}{EI}. \tag{12}$$

Решение дифференциального уравнения имеет следующий вид:

$$\Phi_k(t)=A_k\sin\omega_k t+B_k\cos\omega_k t,$$

где A_k, B_k – произвольные постоянные, характеризующие начальные условия движения при $t=0$. Как видно из уравнения, свободные колебания $y(x,t)$ совершаются по гармоничному закону с частотой ω_k. Каждой частоте свободных колебаний соответствует главная форма $y_k(x)$.

Главные формы колебаний. Найдем общее решение дифференциального уравнения. Для этого составим сначала характеристическое уравнение:

$$r^4-s_k^4=0. \tag{13}$$

Корни этого уравнения:

$$r_1=s_k,\quad r_2=-s_k,\quad r_3=is_k,\quad r_4=-is_k.$$

Из вида корней следует, что общее решение должно быть представлено в таком виде:

$$y_k(x)=Achsx+Bshsx+C\cos sx+D\sin sx, \tag{14}$$

где $chsx$, $shsx$ – гиперболические функции:

$$chsx=\frac{e^{sx}+e^{-sx}}{2},\quad shsx=\frac{e^{sx}-e^{-sx}}{2}. \tag{15}$$

Произвольные постоянные A,B,C,D выразятся через начальные параметры (при x=0). Тогда общее решение запишется так:

$$y_k(x)=y_0Asx+\frac{y_0'}{s_k}Bsx-\frac{M_0}{s_k^2EI}Csx-\frac{Q_0}{s_k^3EI}Dsx, \tag{16}$$

где y_0, y_0', M_0, Q_0 – начальные параметры, соответственно прогиб, угол поворота, изгибающий момент, поперечная сила в начале координат; Asx, Bsx, Csx, Dsx –функции Крылова А.Н.:

$$\begin{aligned}
Asx&=\frac{1}{2}(chsx+\cos sx),\\
Bsx&=\frac{1}{2}(shsx+\sin sx),\\
Csx&=\frac{1}{2}(chsx-\cos sx),\\
Dsx&=\frac{1}{2}(shsx-\sin sx).
\end{aligned} \tag{17}$$

Продифференцировав уравнения трижды по *x*, получим соответственно уравнения для определения угла поворота, изгибающего момента и поперечной силы:

$$y_k'(x)=s_k y_0 Dsx+y_0' Asx-\frac{M_0}{s_k EI}Bsx-\frac{Q_0}{s_k^2 EI}Csx, \quad (18)$$

$$M_k(x)=-s_k^2 y_0 EICsx-s_k y_0' EIDsx+M_0 Asx+\frac{Q_0}{s_k}Bsx, \quad (19)$$

$$Q_k(x)=-s_k^3 y_0 EIBsx-s_k^2 y_0' EICsx+s_k M_0 Bsx+Q_0 Asx. \quad (20)$$

Вынужденные колебания балки. Предполагаем, что груз загружен поперечной нагрузкой, изменяющейся по гармоническому закону:

$$q(x,t)=q(x)\sin\theta t, \quad (21)$$

где θ – частота вынужденных колебаний; *q(x)* – амплитудная функция нагрузки, зависящая только от *x*.

Дифференциальное уравнение принимает следующий вид:

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-q(x)\sin\theta t. \quad (22)$$

Здесь мы найдем частные решения (с правой частью), которые и будут давать вынужденные колебания при переменной нагрузке. Решение будем искать в виде

$$y(x,t)=y(x)\sin\theta t,$$

где *y(x)* – неизвестная амплитудная функция прогибов.

Подставив в исходное уравнение, получим для амплитудного состояния $(\sin\theta t=\pm 1)$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}-s^4 y=-\frac{q(x)}{EI}, \quad (23)$$

где

$$s^4=\frac{m\theta^2}{EI}. \quad (24)$$

В отличие от свободных колебаний здесь *s* включает частоту возмущающей силы (предполагаем, что частота возмущающей силы находится достаточно далеко от резонансной зоны).

Общее решение (полный интеграл) уравнения при $q(x)=q_0=q=const$ будет иметь следующий вид:

$$y(x)=y_0 Asx+\frac{y_0'}{s}Bsx-\frac{M_0}{s^2 EI}Csx-\frac{Q_0}{s^3 EI}Dsx-\frac{q}{s^4 EI}(A_{sx}-1). \quad (25)$$

Как и ранее, продифференцировав последовательно по x, найдем:

$$y'(x)=sy_0 Dsx+y_0' Asx-\frac{M_0}{sEI}Bsx-\frac{Q_0}{s^2 EI}Csx-\frac{q}{s^3 EI}D_{sx}, \quad (26)$$

$$M\ (x)=-s^2 EIy_0 Csx-sy_0' EIDsx+M_0 Asx+\frac{Q_0}{s}Bsx+\frac{q}{s^2}C_{sx}. \quad (27)$$

Выводы и перспективы исследований

В работе получены общие уравнения свободных и вынужденных колебаний балки, которая имеет распределенную массу, составлено дифференциальное уравнение поперечных колебаний этой балки и получено решение этого уравнения при действии возмущающей силы. Эти уравнения позволят в дальнейшем решать задачу о взаимодействии пути и подвижного состава при использовании расчетной схемы пути как балки на многих упруго-диссипативных опорах.

Список использованных источников

1. Вериго, М. Ф. Взаимодействие пути и подвижного состава [Текст] / М. Ф. Вериго, В. Н. Данилов, Е. М. Бромберг, М. А. Фришман. – М.: Трансжелдориздат, 1956. – 280 с.

2. Вериго, М. Ф. Взаимодействие пути и подвижного состава [Текст] / М. Ф. Вериго, А. Я. Коган. – М.: Транспорт, 1986. – 599 с.
3. Даниленко, Э. И. Расчетно-теоретический метод определения упруго-динамических параметров для обычной конструкции пути и многониточных путей [Текст] / Э. И. Даниленко // Исследования взаимодействия пути и подвижного состава: межвуз. сб. науч. тр. – Днепропетровск, 1997. – С. 32-41.
4. Даниленко, Э. И. Определение допускаемых напряжений в литых крестовинах из высокомаранцовистой стали [Текст] / Э. И. Даниленко, А. Г. Коган, Э. А. Щур // Вестник ВНИИЖТа. – 1989. – №5. – С. 44-48.
5. Шахунянц, Г. М. Расчеты элементов верхнего строения пути на прочность [Текст] : учебник / Г. М. Шахунянц. – М.: МИИТ, 1939. – 154 с.
6. Волошко, Ю. Д. Расчет рельса как балки на дискретных упругих опорах со случайными характеристиками [Текст] / Ю.Д. Волошко // Труды ДИИТ. – 1977. – № 196/19. – С. 93-98.
7. Климов, В. И. Статический расчет пути как балки на опорах с нелинейной жесткостью [Текст] / В.И. Климов, В.В. Рыбкин // Труды ДИИТ. – 1984. – № 235/26. – С. 3-8.
8. Даренський, О. М. Оцінення впливу на колію подовжних сил, які виникають в поїзді в умовах промислового транспорту [Текст] / О. М. Даренський, Н. В. Бугаєць // Зб. наук. праць УкрДАЗТ. – Харків: УкрДАЗТ, 2006. – Вип. 72. – С. 119-124.
9. Kaiyun Wang , Chao Huang, Wanming Zhai, Pengfei Liu, Shen Wang. (2014). Progress on wheel–rail dynamic performance of railway curve negotiation. Journal of Traffic and Transportation Engineering (English Edition) , 1, 209–220.
10. Dailydka, S. Modelling the interaction between railway wheel and rail/ [Text] J. Sadeghi, S. Shoja, //Transport. – 2008. – Т. 23. – №. 3. – С. 236–239.
11. Otero, J. A mathematical model to study railway track dynamics for the prediction of vibration levels generated by rail vehicles/ [Text] J. Otero , M. A. Martínez, de los Santos, S. Cardona //Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit. – 2011. – С. 0954409711406837.
12. Першин, С. П. Вертикальная жесткость пути и его надежность [Текст] / С. П. Першин // Путь и путевое хозяйство. – 1996. – №8. – С. 8-10.

Даренський О. М., Лейбук Я. С. Математична модель коливань залізничної колії як балки, що має інерційні характеристики. Розроблено математичну модель коливань залізничної колії, в основу якої покладена розрахункова схема колії у вигляді балок на багатьох пружно-дисипативних опорах. На відміну від розроблених раніше моделей врахована розподілена маса колії. Це дає змогу застосовувати запропоновану модель, у тому числі для розрахунків сил взаємодії колії та рухомого складу, а також для умов швидкісного і високошвидкісного руху.

Ключові слова: балка на багатьох пружно-дисипативних опорах, вільні і вимушені коливання.

Darenskiy Alexander, Leibuk Yaroslav. A mathematical model of vibrations of railway track as beams, which has inertial characteristics. A mathematical model of rail track vibrations based on the design diagram of a long beam on many elastic-dissipative supports, which differs from previously developed models, has been developed. It takes into account the distributed track mass involved in the vibration process. The mass includes the mass of rails, fastening elements of ties, part of the ballast and roadbed which are subject to vibration deformations. The model makes it possible to calculate the track-train interaction forces for both industrial and trunk railways intended for conventional and high-speed traffic.
The study presents general equations of free and forced vibrations of the beam of distributed mass, a differential equation of transverse vibrations of the beam and the solution to this equation under the disturbing force. Furthermore, these equations will allow solving the problem on the track-train interaction using the design diagram of the track as a beam on multiple elastic-dissipative supports.

Keywords: a beam on multiple elastic-dissipative supports, free and forced vibrations.

Надійшла 22.02.2017 р.

Даренський Олександр Миколайович, *доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри «Колія та колійне господарство» Українського державного університету залізничного транспорту, Харків, Україна. E-mail: ppx_xiit@kart.edu.ua*
Лейбук Ярослав Сергійович, *аспірант, кафедра колії та колійного господарства, Український державний університет залізничного транспорту, Харків, Україна. E–mail: leibuk_y@ukr.net.*

Darenskiy Alexander, *PhD, Dr. Sc. Professor, Head of Department of track and track facilities of Ukrainian State University of Railway Transport, Kharkiv, Ukraine. E-mail: ppx_xiit@kart.edu.ua*
Leibuk Yaroslav, *postgraduate, department of track and track facilities of Ukrainian State University of Railway Transport, Kharkiv, Ukraine. E–mail: leibuk_y@ukr.net*