

ВОЛОДАРСКИЙ В. А., к.т.н., с.н.с., профессор (Красноярский институт железнодорожного транспорта, Россия)

## Определение параметров распределений при оцененном коэффициенте вариации

В статье приведены формулы и рассчитаны значения коэффициентов вариации традиционных, используемых в теории надежности, распределений (экспоненциального, Вейбулла и гамма), а также предложенных автором для описания отказов технических устройств в условиях неполноты исходной информации распределений (косинуса, косинуса квадрат и степенного). В зависимости от полученных значений коэффициентов вариации выбираются соответствующие распределения для описания приработочных, внезапных или постепенных отказов технических устройств. Изложен метод определения параметров распределений по оцененному значению коэффициента вариации. Приведен численный пример определения параметров распределений при постепенных отказах технических устройств и построены зависимости значений вероятности безотказной работы и интенсивности отказов от времени эксплуатации.

**Ключевые слова:** распределение, параметр, коэффициент вариации, отказ, информация.

### Введение

Определение вида и параметров распределений зачастую связано с трудностями, вызванными малым объемом статистических данных об отказах технических устройств (ТУ). Под неполнотой исходной информации понимается такая выборка об отказах ТУ, количество членов которой меньше необходимого по правилам прикладной статистики числа наблюдений для проверки согласия опытного распределения с теоретическим распределением. Например, при использовании критерия согласия хи-квадрат число отказов должно быть более 100 [1].

**Цель статьи** - изложение методики определения параметров распределений по оцененному значению коэффициента вариации в условиях неполноты исходной информации о наработках на отказ технических устройств.

### Изложение основного материала

#### 1. Определение коэффициента вариации распределений

Коэффициент вариации  $V$  при любом распределении определяется из выражения [1].

$$V = \frac{\mu_2^{0,5}}{\mu_1}, \quad (1)$$

где  $\mu_1$  – первый начальный момент;

$\mu_2$  - второй центральный момент.

Значения  $\mu_1$  и  $\mu_2$  определяются согласно работе [1] по формулам:

$$\mu_1 = \int_0^{\infty} t f(t) dt; \quad (2)$$

$$\mu_2 = \int_0^{\infty} (t - \mu_1)^2 f(t) dt, \quad (3)$$

где  $f(t)$  – плотность распределения за время  $t$ .

Коэффициенты вариации традиционных распределений в теории надёжности определяются следующим образом [2].

*Экспоненциальное распределение:*

$$\mu_1 = 1/\lambda; \quad \mu_2 = 1/\lambda^2; \quad V = 1,$$

где  $\lambda$  – интенсивность отказов.

Распределение используется для описания внезапных отказов с постоянным значением интенсивности отказов.

*Гамма-распределение:*

$$\mu_1 = m/\Gamma; \quad \mu_2 = m/\Gamma^2; \quad V = 1/m^{0,5},$$

где  $m$  – параметр формы;  $\Gamma$  - параметры масштаба.

Гамма-распределение используется для описания приработочных отказов при  $m < 1$  и постепенных отказов при  $m > 1$ .

В табл. 1 представлены значения коэффициента вариации при отдельных значениях параметра формы.

Таблица 1

<i>m</i>	0,01	0,09	0,16	0,25	1,0	4,0	9,0	16
<i>V</i>	10	3,33	2,5	2,0	1,0	0,5	0,33	0,25

Как видно из табл. 1, при возрастании параметра формы коэффициент вариации гамма-распределения снижается.

*Распределение Вейбулла:*

$$\mu_1 = aK_b. \text{ Здесь } K_b = \Gamma(1 + 1/b), \quad (4)$$

где *a* – параметр масштаба; *b* – параметр формы;  $\Gamma$  – гамма-функция.

Распределение Вейбулла используется для описания приработочных отказов при  $b < 1$  и постепенных отказов при  $b > 1$ .

*Распределение косинуса, когда  $f(t) = (1/T) \sin(t/T)$  [3]:*

$$\mu_1 = \int_0^{\pi T/2} t f(t) dt = \int_0^{\pi T/2} (t/T) \sin(t/T) dt = T;$$

$$\mu_2 = \int_0^{\pi T/2} (t - \mu_1)^2 f(t) dt = \int_0^{\pi T/2} (t - T)^2 (t/T) \sin(t/T) dt = (\pi - 3) T^2$$

Подставив значения  $\mu_1$  и  $\mu_2$  в выражение (3), получим  $V = 0.376$ .

*Распределение косинуса квадрат, когда  $f(t) = (1/T) \sin(2t/T)$  [4]:*

$$\mu_1 = \int_0^{\pi T/2} t f(t) dt = \int_0^{\pi T/2} (t/T) \sin(2t/T) dt = \pi T/4;$$

$$\mu_2 = \int_0^{\pi T/2} (t - \mu_1)^2 f(t) dt = \int_0^{\pi T/2} \left(t - \frac{\pi T}{4}\right)^2 \sin(2t/T) dt = \left(\frac{\pi^2}{16} - 0.5\right) T^2.$$

Подставив значения  $\mu_1$  и  $\mu_2$  в выражение (1), получим  $V = 0.435$ .

Поскольку у этих распределений коэффициент вариации менее единицы, они применимы для описания постепенных отказов технических устройств.

*Степенное распределение, когда  $f(t) = b a^{-b} t^{b-1}$  [3], где *a* – параметр масштаба; *b* – параметр формы:*

$$\mu_1 = \int_0^a t f(t) dt = \int_0^a t b a^{-b} t^{b-1} dt = T;$$

$$\mu_2 = \int_0^a (t - \mu_1)^2 f(t) dt = \int_0^a (t - T)^2 b \cdot a^{-b} t^{b-1} dt = T^2 / (b^2 + 2b).$$

Коэффициенты  $K_b$ ,  $C_b$  и коэффициент вариации  $V = C_b/K_b$  в зависимости от значений параметра *b* определяется по табл. 3.5 [2].

$$\mu_2 = C_b^2 = \Gamma\left(1 + 2/b\right) - K_b^2.$$

В табл. 2 представлены значения коэффициента вариации при отдельных значениях параметра формы *b*.

Таблица 2

<i>b</i>	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	2,0	3,0	4,0
<i>V</i>	15,8	3,14	1,74	1,26	1,0	0,52	0,37	0,28

Как видно из табл. 2, при возрастании параметра формы коэффициент вариации распределения Вейбулла снижается.

Используя выражения (1), (2) и (3), определим коэффициенты вариации нетрадиционных распределений, предложенных автором в работах [3, 4], для описания отказов технических устройств.

Подставив значения  $\mu_1$  и  $\mu_2$  в выражение (3), получим

$$V = 1/(b^2 + 2b).$$

Степенное распределение может использоваться для описания постепенных отказов при  $b > 1$  или

одновременно для описания приработочных, внезапных и постепенных отказов при  $b < 1$  [3].

На рис. 1 представлена зависимость интенсивности отказов (ИО) в общем случае от времени эксплуатации при разных значениях коэффициента вариации.

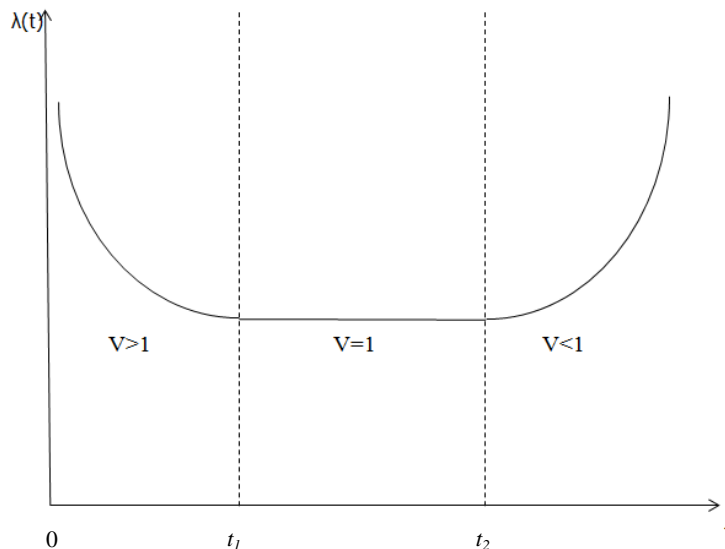


Рис. 1. Зависимость интенсивности отказов от времени эксплуатации

Если получена оценка  $V > 1$ , то это означает, что в ТУ происходят приработочные отказы, когда ИО монотонно убывает (см. рис. 1, участок времени эксплуатации от 0 до  $t_1$ ). В этом случае могут быть использованы распределения Вейбулла и гамма с коэффициентами формы менее единицы.

Если получено  $V = 1$ , то это означает, что в ТУ происходят внезапные отказы, когда значение ИО остаётся примерно постоянным (см. рис. 1, участок от  $t_1$  до  $t_2$ ). В этом случае может быть использовано экспоненциальное распределение.

Если получено  $V < 1$ , то это означает, что происходят постепенные отказы, связанные с износом и старением ТУ, когда ИО монотонно возрастает (см. рис. 1, участок от  $t_2$  и далее). В этом случае могут быть использованы распределения Вейбулла, гамма и степенное с параметрами формы более единицы, а также распределения косинуса и косинуса квадрат.

**2. Определение параметров распределений при постепенных отказах технических устройств**

Постепенные отказы технических устройств, подверженных износу и старению, обычно описываются в теории надежности классическими

распределениями Вейбулла и гамма [2]. Кроме того, можно использовать степенное распределение [3]. Вероятность безотказной работы  $P(t)$  и интенсивность отказов  $\lambda(t)$  за время эксплуатации  $t$  указанных распределений определяются по следующим уравнениям.

1. При распределении Вейбулла [2]

$$P(t) = \exp(-(t/a)^b); \quad \lambda(t) = (b/a)(t/a)^{b-1} . \tag{5}$$

2. При гамма – распределении [2]

$$P(t) = \exp(-r t) \sum_0^{m-1} (r t)^i / i! ; \tag{6}$$

$$\lambda(t) = (r(r t)^{m-1}) / ((m - 1)! \sum_0^{m-1} ((r t)^i / i!) .$$

3. При степенном распределении [3].

$$P(t) = 1 - (t/a)^b; \quad \lambda(t) = (b t^{b-1}) / (a^b - t^b) . \tag{7}$$

Для определения параметров распределений используем методический подход, изложенный в работе [5]. При оцененном значении коэффициента вариации  $V$  параметры рассмотренных выше распределений определяются следующим образом.

1. При распределении Вейбулла как  $b \approx 1/V$ ;  $a = T/K_b$ . Здесь коэффициент  $K_b$  при оцененном значении  $b$  определяется по табл. 3.5 [2], а  $T$  – наработка на отказ.

2. При гамма-распределении как  $m = 1/V^2$ ;  $r = m/T$ .

3. При степенном распределении [3] как  $b = (1 + 1/V^2)^{0.5} - 1$ ;  $a = T(b + 1)/b$ .

**Пример.** Получено 23 наблюдения наработки на отказ силовых трансформаторов в годах: 2,8; 2,9; 3,3; 4,2; 4,3; 4,6; 4,6; 5,2; 5,2; 5,3; 5,6; 6,7; 6,9; 7,0; 7,1; 8,5; 9,5; 9,9; 10,6; 10,7; 12,8; 13,0; 17,5.

$$P(t) = \exp(0.54 t) (1 + 0.54 t + (0.54 t)^2/2 + (0.54 t)^3/6); \tag{6a}$$

$$\lambda(t) = (0.54(0.54 t)^3)/6(1 + 0.54 t + (0.54 t)^2/2 + (0.54 t)^3/6), \quad 1/\text{год.}$$

3. При степенном распределении получим:  $b = 1,24$ ;  $a = 13,77$  года. Подставив значения  $a$  и  $b$  в уравнения (8), получим

$$P(t) = 1 - 0,04 t^{1,24};$$

$$\lambda(t) = 1,24 t^{0,24}/(24,91 - t^{1,24}), \quad 1/\text{год.} \tag{7a}$$

Определяем наработку на отказ  $T$ , среднеквадратическое отклонение  $\delta$  и коэффициент вариации  $V$  по формулам:

$$T = (1/n)(\sum_1^n ti); \quad \delta = ((1/(n-1)\sum_1^n (ti - T)^2)^{0.5};$$

$$V = \delta/T \quad \text{как } T = 7,44 \text{ часа; } \delta = 3,76 \text{ часа; } V \approx 0,5.$$

1. При распределении Вейбулла получим:  $b = 2$ ; по табл. 3.5 [2] находим  $K_b = 0,886$ , тогда  $a = 8,4$  года. Подставив значения  $a$  и  $b$  в уравнения (5), получим

$$P(t) = \exp(-(t/8,4)^2); \quad \lambda(t) = 0,028t \text{ 1/год.} \tag{5a}$$

2. При гамма - распределении получим:  $m = 4$ ;  $r = 0,54$  1/год. Подставив значения  $m$  и  $r$  в уравнения (6) и (7), получим

Результаты расчетов значений  $P(t)$  и  $\lambda(t)$  по уравнениям (5a), (6a) и (7a) в зависимости от времени эксплуатации  $t$  сведем в табл. 3.

Таблица 3

Распределение	$t$	0	2	4	6	8	10	12
Вейбулла	$P(t)$	1	0,95	0,80	0,60	0,40	0,24	0,13
	$\lambda(t)$	0	0,056	0,112	0,168	0,224	0,28	0,336
Гамма	$P(t)$	1	0,97	0,84	0,60	0,37	0,22	0,125
	$\lambda(t)$	0	0,037	0,113	0,186	0,239	0,270	0,307
Степенное	$P(t)$	1	0,90	0,77	0,63	0,47	0,30	0,12
	$\lambda(t)$	0	0,06	0,08	0,12	0,17	0,28	0,72

На рис. 2 представленны зависимости вероятности безотказной работы, а на рис. 3 – зависимости интенсивности отказов от времени эксплуатации.

Из рис. 2 видно, что расхождение между кривыми

зависимости вероятности безотказной работы, особенно при распределении Вейбулла и гамма-распределении в рассматриваемом диапазоне времени эксплуатации, незначительны.

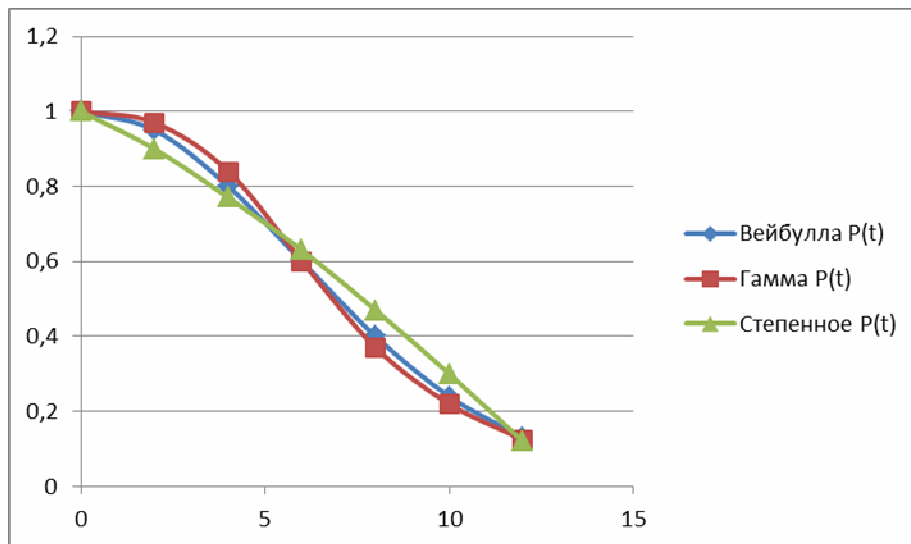


Рис. 2. Зависимости вероятности безотказной работы от времени эксплуатации

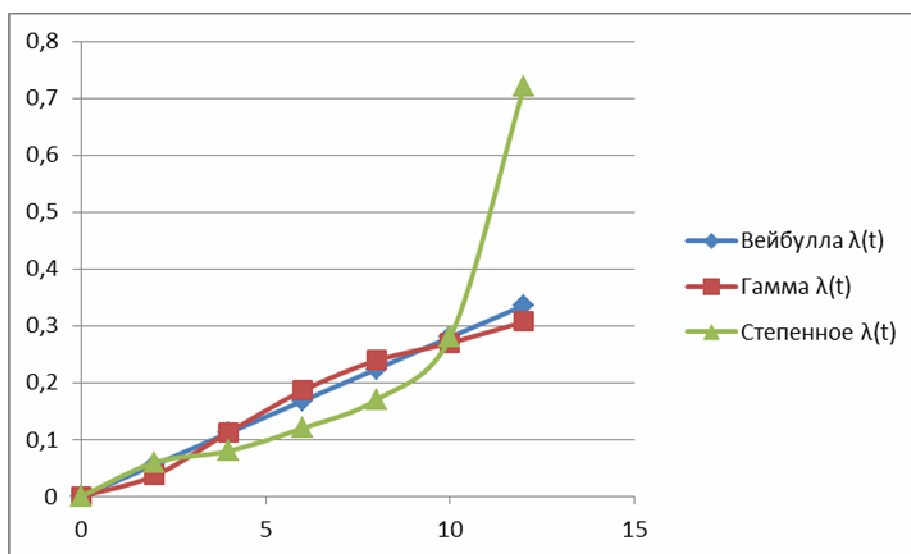


Рис. 3. Зависимости интенсивности отказов от времени эксплуатации

Из рис. 3 видно, что расхождение между кривыми зависимости интенсивности отказов при распределении Вейбулла и гамма-распределении в рассматриваемом диапазоне времени эксплуатации незначительны. Поэтому в этом случае для описания отказов устройств целесообразно использовать наиболее простое и универсальное распределение Вейбулла.

#### Вывод

Представляется целесообразным проведение исследований рассмотренных выше распределений на эквивалентность получаемых решений при использовании моделей и методов управления надежностью технических устройств.

## Список использованных источников

1. Хан, Г. Статистические модели в инженерных задачах [Текст] / Г. Хан, С. Шапиро. – М. : Мир, 1969. – 395 с.
2. Шор, Я. Б. Таблицы для анализа и контроля надежности [Текст] / Я. Б. Шор, Ф. И. Кузьмин. – М. : Советское радио, 1968. – 288 с.
3. Володарский, В. А. О распределениях для описания отказов технических устройств [Текст] / В. А. Володарский // Методы менеджмента качества. – 2014. – № 4. – С. 50-56.
4. Володарский, В. А. Об одном тригонометрическом распределении для описания отказов технических устройств [Текст] / В. А. Володарский // Информационно-управляющие системы на железнодорожном транспорте. – 2015. – № 4. – С. 48-49.
5. Володарский, В. А. Определение показателей надежности электрооборудования при неопределенности исходной информации [Текст] / В. А. Володарский // Электричество. – 1987. – № 3 С. 49-51.

**Володарський В. А. Визначення параметрів розподілів при оціненому коефіцієнті варіації.**

Визначення виду і параметрів розподілів часто пов'язано із труднощами, викликаними малим обсягом статистичних даних про відмови технічних пристроїв. Під неповнотою вихідної інформації розуміється така вибірка про відмови, кількість членів якої менше необхідної за правилами прикладної статистики кількості спостережень для перевірки згоди дослідного розподілу з теоретичним. Мета статті - виклад методики визначення параметрів розподілів за оціненими значеннями коефіцієнта варіації в умовах неповноти вихідної інформації про напрацювання на відмову технічних пристроїв.

Наведено формули і розраховано значення коефіцієнтів варіації традиційних, використовуваних в теорії надійності, розподілів (експоненціального, Вейбулла і гамма), а також запропонованих автором для опису відмов технічних пристроїв в умовах неповноти вихідної інформації розподілів (косинуса, косинуса квадрат і степеневого). Залежно від отриманих значень коефіцієнтів варіації вибираються відповідні розподіли для опису припрацьовувальних, раптових або поступових відмов технічних пристроїв. Викладено метод визначення параметрів розподілів за оціненими значеннями коефіцієнта варіації. Наведено числовий приклад визначення параметрів розподілів при поступових відмовах технічних пристроїв і побудовано залежності значень імовірності безвідмовної роботи й інтенсивності відмов від часу експлуатації.

**Ключові слова:** розподіл, параметр, коефіцієнт варіації, відмова, інформація.

**Volodarsky V. A. Determination of the parameters of the distributions evaluated with the coefficient of variation.** Determination of the type and parameters of distributions is often associated with difficulties caused by a small amount of statistical data on failures of technical devices. Incomplete initial information means such a sample of failures, the number of members of which is less than the number of observations required by the rules of applied statistics to verify the agreement of the experimental distribution with the theoretical distribution. The purpose of the article is to present the method of determining the parameters of distributions according to the estimated value of the coefficient of variation in the conditions of incomplete initial information about the operating time for failure of technical devices.

The formulas and calculated values of the coefficients of variation of traditional that is used in the theory of reliability distributions (exponential, Weibull, and gamma), as also proposed by the author to describe the failures of technical devices in the conditions of incompleteness of the initial information distributions (cosine, cosine squared, and exponential). Depending on the obtained values of the coefficients of variation, appropriate distributions are chosen to describe the processing, sudden or gradual failures of technical devices. The method of determination of parameters of distributions on the estimated value of coefficient of variation is stated. A numerical example of determining the parameters of distributions for gradual failures of technical devices is given and dependences of the probability of failure-free operation and failure rate on the service time are constructed.

**Keywords:** distribution, parameter, coefficient of variation, failure, information.

*Надійшла 13.03.2018 р.*

*Volodarsky V. A., PhD, senior researcher, associate Professor, Institute of Railway Transport, Krasnoyarsk, Russia. E-mail: [volodarsky.vladislav@yandex.ru](mailto:volodarsky.vladislav@yandex.ru)*