УДК 531.31, 632.548 DOI: 10.18664/ikszt.v30i1.326792

ЗАДОРОЖНИЙ А. О. Канд. техн. наук, (Військовий інститут танкових військ Національного технічного університету Харківський політехнічний)
СТАХОВСЬКИЙ О. В. д-р техн. наук (Національний Університет Оборони)

Нелінійна динаміка матеріальної точки в рухомому газоподібному середовищі
і. інтегральне подання координат плоскої траєкторії та ефект реверсування руху зустрічним повітряним потоком

Анотація: *Викладено аналітичний розв'язок задачі зовнішньої балістики матеріальної точки, коли враховано опір газоподібного (повітряного) середовища. Розглянуто модель квадратичного (за швидкістю руху точки) опору повітряного середовища. Знайдено інтегральне подання координат плоскої траєкторії. Розглянуто особливості ефекту реверсування руху зустрічним повітряним потоком і визначено його основні характеристики.*

Ключові слова: *аналітичний підхід, розв'язок, нелінійна динаміка, матеріальна точка, рухоме повітряне середовище, квадратичний за швидкістю руху опір, задачі зовнішньої балістики, інтегральне подання координат, плоска траєкторія, ефект реверсування руху, зустрічний повітряний потік.*

Вступ.

У цьому дослідженні, на відміну від відомих, для розв'язання задач зовнішньої балістики матеріальної точки застосовано аналітичний підхід (тобто розв'язок задачі знайдений у квадратурах). Це дає змогу визначити інтегральне подання координат плоскої траєкторії руху точки в умовах рухомого газоподібного (повітряного) середовища та визначити основні характеристики й особливості можливого ефекту реверсування вказаного руху зустрічним повітряним потоком. Завдяки розвинутому в дослідженні підході вдається суттєво спростити розрахунки параметрів власне траєкторії руху матеріальної точки й мінімізувати чисельні розрахунки їх на комп'ютері.

Аналіз останніх досліджень і публікацій.

Задачі балістики матеріальної точки розглянуті в курсах теоретичної механіки [2, 3], відкритих джерелах досліджень із цієї тематики [8-17], а також початкових результатах проведених теоретичних досліджень [4-7]. Проте, на відміну від цитованих вище джерел літератури, у цьому дослідженні, як і в роботі [1], для розв'язання рівнянь руху матеріальної точки в задачах балістики для плоских траєкторій руху, що відбувається в умовах наявного рухомого повітряного середовища, використано аналітичний підхід і розв'язок рівнянь руху, які відповідають таким траєкторіям, знайдений у квадратурах, що й дає змогу суттєво спростити алгоритм розрахунку параметрів траєкторії руху такого типу.

Визначення мети та завдання дослідження.

Мета статті полягає в обґрунтуванні моделі руху матеріальної точки в умовах її взаємодії з рухомим повітряним середовищем у задачах зовнішньої балістики і визначенні на цій основі основних параметрів таких типів траєкторій руху (плоского типу). Подібний підхід дає змогу розглянути основні ефекти і визначити основні параметри можливого ефекту реверсування руху матеріальної точки зустрічним повітряним потоком.

Основна частина дослідження.

Вплив руху повітряного середовища на балістичні характеристики матеріальної точки частково розглянутий у роботі [1], але в межах лінійної постановки задачі. Тут, на відміну від згаданих рішень, припускаємо, що сила аеродинамічної взаємодії частинки з середовищем (повітрям) пропорційна квадрату відносної швидкості руху частинки $v_{відносна}$, м/с, тобто

$$R = K \cdot m \cdot (v_{відносна})^2 ., \quad (1)$$

де m – маса частинки, кг;

K – коефіцієнт аеродинамічної взаємодії частинки з середовищем (коефіцієнт парусності), м$^{-1}$.

Залежно від напрямку $v_{відносна}$ сила R може бути силою опору, що гальмує рух, або рушійною силою, що прискорює його. Після реверсування руху точки зустрічним повітряним потоком гальмівна сила переходить у рушійну силу.

Критерієм, який визначає можливість існування того чи іншого типу руху матеріальної точки у таких умовах, є такий:

$$sign\left(\frac{(\vec{R}\cdot\vec{v}_{відносна})}{\left|\vec{R}\right|\cdot\left|\vec{v}_{відносна}\right|}\right)=\begin{cases}+1, & R-рушійна\ сила;\\ -1, & R-гальмівна\ сила;\\ 0, & критичний\ випадок^*.\end{cases} \quad (2)$$

У формулі (2) $(\vec{R}\cdot\vec{v}_{відносна})-$ символізує скалярний добуток двох векторних величин ($\vec{R}$ та $\vec{v}_{відносна}$). У критичному випадку* по осі OX (горизонтальна вісь) точка рухається зі швидкістю повітряного потоку, а у вертикальному напрямку руху (по осі OY) існує розмаїття рухів.

За умови виконання залежності (1) розрахунок координат траєкторії руху матеріальної точки зведений до квадратур, які, на жаль, не виражені елементарними функціями або затабульованими спеціальними функціями. Тому для спрощення розрахунків, за типових випадків руху, у роботі [1] складені спеціальні таблиці цих інтегралів. Але для пологих (настільних) траєкторій усе ж таки вдається побудувати наближені аналітичні розв’язки нелінійних спрощених рівнянь руху із урахуванням вітрових потоків. У цьому випадку розрахунок параметрів руху частинки пов’язаний із функцією Ламберта, дані про яку висвітлені у згаданому вище дослідженні.

1. Інтегральне подання координат плоскої траєкторії

Розглянемо спочатку спрощений варіант задачі, коли вектор початкової швидкості точки $\vec{v}_0$ і вектор повітряного потоку $\vec{V}$ лежать в одній вертикальній площині, тобто виконана умова

$$(\vec{v}_0\cdot\vec{k})=(\vec{V}\cdot\vec{k})=0, \quad (3)$$

де $\vec{k}$ – орт вздовж осі аплікат OZ, рух повітряного потоку і власне матеріальної точки відбувається у площині XOY.

Оскільки траєкторія руху точки плоска, то її координати задовольняють два диференціальні рівняння (у плоскій системі декартових координат):

$$\begin{cases}\ddot{x}+K\cdot(\dot{x}-V_x)\cdot\left[(\dot{x}-V_x)^2+(\dot{y}-V_y)^2\right]^{1/2}=0;\\ \ddot{y}+K\cdot(\dot{y}-V_y)\cdot\left[(\dot{x}-V_x)^2+(\dot{y}-V_y)^2\right]^{1/2}=-g.\end{cases} \quad (4)$$

Система диференціальних рівнянь (4) відповідає етапу (стадії) польоту матеріальної точки, коли вона рухається вгору (проти сил гравітаційного тяжіння) вздовж вертикальної осі OY. З рухом униз вздовж цієї ж осі (стадія падіння до поверхні землі) знак перед g ($\vec{g}-$вектор прискорення вільного падіння поблизу поверхні планети Земля) слід змінити на протилежний (тобто на плюс +). У формулі (4) через V_x та V_y позначено проєкції вектора повітряного потоку $\vec{V}$ на осі OX та OY.

Розв’язки системи (4) мають задовольняти початкові умови

$$x(0)=y(0)=0;\ \ \dot{x}(0)=v_1=v_0\cdot\cos\theta_0;\ \ \dot{y}(0)=v_2=v_0\cdot\sin\theta_0, \quad (5)$$

де θ_0- початковий (у момент часу $t=0$) кут нахилу до горизонтальної осі (OX) початкового вектора швидкості руху матеріальної точки $\vec{v}_0$.

Зазначимо, що в такій постановці задачі приймаємо постійною величину $\vec{V}$ (нижче наведені міркування врахування рівнозмінного (прискореного/сповільненого) варіанта закону руху повітряного потоку.

У частинному випадку рівняння (4) описують стаціонарний режим руху (прискорення повітряного потоку відсутні), який у подальшому будемо називати узагальненим режимом витання. Саме йому відповідає політ матеріальної точки з постійною швидкістю:

$$\begin{cases}\dot{x}=V_x=const;\ \ x=V_xt;\ \ \dot{y}=V_y-\sqrt{\dfrac{g}{K}}=const;\\ y=\left(V_y-\sqrt{\dfrac{g}{K}}\right)\cdot t.\end{cases} \quad (6)$$

Цей варіант руху можливий, коли у формулі (5)

$$x(0)=y(0)=0;\ \ \dot{x}(0)=V_x;\ \ \dot{y}(0)=V_y-\sqrt{\frac{g}{K}}. \quad (7)$$

Далі будемо розглядати більш типові й більш складні варіанти нестаціонарного руху. Залежно від значень v_1 та V_x розрізнятимемо три випадки: $v_1-V_x>0;$ $v_1-V_x=0$ та $v_1-V_x<0.$ Зупинимося спочатку на першому з них, приймаючи $v_1>V_x$.

Перейдемо до нових змінних за формулами

$$\dot{x}-V_x=u\cdot\cos\varphi;\ \ \dot{y}-V_y=u\cdot\sin\varphi. \quad (8)$$

Підставляючи вираз (8) у формулу (4), матимемо

$$\begin{cases} \dot{u}\cdot\cos\varphi - u\cdot\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} + K\cdot u^2\cdot\cos\varphi = 0; \\ \dot{u}\cdot\sin\varphi + u\cdot\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} + K\cdot u^2\cdot\sin\varphi = -g. \end{cases} \tag{9}$$

Якщо у формулі (9) з першого рівняння, помноженого на $\sin\varphi$, відняти друге рівняння, помножене на $\cos\varphi$, то отримаємо

$$\cos\varphi = -\frac{u}{g}\cdot\dot{\varphi} = -\frac{u}{g}\cdot\frac{d\varphi}{dt}. \tag{10}$$

Перше рівняння системи (9) із урахуванням виразу (10) перетворимо до такої форми:

$$\dot{u}\cdot\cos\varphi - u\cdot\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} = \frac{K\cdot u^3}{g}\cdot\dot{\varphi}, \tag{11}$$

а потім до класичного (у теорії диференціальних рівнянь) рівняння Бернуллі

$$\frac{du}{d\varphi}\cdot\cos\varphi - u\cdot\sin\varphi = \frac{K\cdot u^3}{g}, \tag{12}$$

оскільки $\dot{u} = \frac{du}{d\varphi}\cdot\dot{\varphi}.$

До запису розв'язку рівняння (12) перетворимо початкові умови задачі. Ураховуючи вирази (5) та (8), матимемо

$$x(\varphi_0) = y(\varphi_0) = 0;\ \ \varphi_0 = arctg\left\{\frac{v_2 - V_y}{v_1 - V_x}\right\};\ \ u_0 = \sqrt{(v_1 - V_x)^2 + (v_2 - V_y)^2}. \tag{13}$$

Координати точок траєкторії руху знаходимо інтегруванням за t виразів (8):

$$x = \int_0^t \dot{x}dt = \int_0^t \left(u\cdot\cos\varphi + V_x\right)dt;\ \ y = \int_0^t \dot{y}dt = \int_0^t \left(u\cdot\sin\varphi + V_y\right)dt. \tag{14}$$

Ураховуючи вираз (10), переходимо до інтегрування за φ:

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{g}\cdot\left(\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} u^2 d\varphi + V_x\cdot\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{u}{\cos\varphi}d\varphi\right); \\ y = -\frac{1}{g}\cdot\left(\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} u^2\cdot tg\varphi d\varphi + V_y\cdot\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{u}{\cos\varphi}d\varphi\right). \end{cases} \tag{15}$$

Функцію $u = u(\varphi)$ знаходимо з рівняння (12):

$$\begin{cases} u = \frac{1}{\cos\varphi}\cdot\left\{c - \frac{K}{g}\cdot\left(\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} + \ln\left[\frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}\right]\right)\right\}^{-1/2}; \\ c = \frac{1}{(v_1 - V_x)^2} + \frac{K}{g}\cdot\left(\frac{\sin\varphi_0}{\cos^2\varphi_0} + \ln\left[\frac{1+\sin\varphi_0}{\cos\varphi_0}\right]\right). \end{cases} \tag{16}$$

У зв'язку зі складністю (16) інтеграли (15) необхідно знаходити чисельно на комп'ютері.

Спростимо обчислення горизонтальної дальності польоту матеріальної точки x_* у найбільш розповсюдженому випадку, коли потік повітря горизонтальний ($V_y = 0$) і $y_* = 0.$ Введемо безрозмірні параметри

$$\lambda = \frac{g}{K\cdot\left(v_0\cdot\cos\theta_0 - V_x\right)^2};\ \ \varphi_0 = arctg\left\{\frac{v_0\cdot\sin\theta_0}{v_0\cdot\cos\theta_0 - V_x}\right\}, \tag{17}$$

розрахунок x_* тоді зведено до формули

$$\begin{cases} x_* = \frac{1}{K}\cdot\left\{F(\varphi_0,\lambda) + V_x\cdot\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{g}}\cdot F_1(\varphi_0,\lambda)\right\}; \\ F(\varphi_0,\lambda) = -\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1}\frac{d\varphi}{f(\varphi)\cdot\cos^2\varphi};\ \ F_1(\varphi_0,\lambda) = -\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1}\frac{d\varphi}{\sqrt{f(\varphi)}\cdot\cos^2\varphi}. \end{cases} \tag{18}$$

При цьому у співвідношеннях (18)

$$f(\varphi) = \lambda + \frac{\sin\varphi_0}{\cos^2\varphi_0} + \ln\left(\frac{1+\sin\varphi_0}{\cos\varphi_0}\right) - \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} - \ln\left(\frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}\right), \tag{19}$$

а верхня границя інтегрування φ_1 така, що

$$\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1}\frac{\sin\varphi d\varphi}{f(\varphi)\cdot\cos^3\varphi} = 0. \tag{20}$$

Чисельні значення $F(\varphi_0,\lambda)$ і $F_1(\varphi_0,\lambda)$ доволі легко знайти за допомогою ПЕОМ.

Розглянемо приклади розрахунку за формулами (18) із застосуванням чисельного інтегрування виразів, які визначають величину x_*.

Приклад 1. Вихідні дані: $v_0 = 240{,}0$ м/с (0,73 М, де М – число Маха); $\theta_0 = 30^0;\ K = 1{,}5\cdot 10^{-4}\ c^{-1};\ V_x = 93{,}5\ м/с.$ Для вказаних чисел за формулами (17) знаходимо: $\lambda = 0{,}5;\ \varphi_0 = 46{,}38^0.$ Чисельні розрахунки дають такі значення: $F(\varphi_0,\lambda) = 1{,}186;\ F_1(\varphi_0,\lambda) = 1{,}942.$ Підставляючи ці значення складових у формулу (18) для x_*, знаходимо: $x_* = 228{,}8$ км.

Приклад 2. Обчислимо відстань x_* за $v_0 = 240{,}0$ м/с; $\theta_0 = 30^0;\ K = 1{,}5\cdot 10^{-4}\ c^{-1};\ V_x = -62$ м/с. Обчислення за формулами (17) дають $\lambda = 0{,}09;\ \varphi_0 = 23{,}97^0.$ Для цих значень знаходимо чисельними розрахунками на ПЕОМ: $F(\varphi_0,\lambda) = 1{,}793;\ F_1(\varphi_0,\lambda) = 1{,}617.$ Остаточно за формулою (18) отримаємо $x_* = 36{,}9$ км.

За дії зустрічного вітру суттєво зменшилася горизонтальна протяжність траєкторії ($\dfrac{228{,}8}{36{,}9} \approx 6{,}2$), тобто більш ніж у шість разів.

Перш ніж розглядати застосування рівнянь (4) для розрахунку параметрів траєкторії польоту матеріальної точки у припущенні, що $v_1 < V_x$, з'ясуємо, якими стануть розрахункові залежності, коли $v_1 = V_x$. Це особливий частинний випадок руху. Він характеризується тим, що рівняння в системі (4) роз'єднуються (стають незалежними), причому з першого рівняння випливає, що $\dot{x} = V_x = const$. Рух точки в напрямку осі OX відбувається зі швидкістю повітряного потоку в цьому напрямку. Друге рівняння в системі (4) описує рух точки у вертикальному напрямку й набуває спрощеного вигляду

$$\ddot{y} + K\cdot(\dot{y} - V_y)\cdot\left|\dot{y} - V_y\right| = -g. \qquad (21)$$

Початкові умови до рівняння (21), як і раніше, приймаємо як

$$y(0) = 0;\ \ \dot{y}(0) = v_2 = v_0\cdot\sin\theta_0 \ge 0. \qquad (22)$$

Розв'язок цієї задачі Коші можна виразити в елементарних функціях. Він залежить від швидкості V_y.

Будемо розрізняти падаючий (який рухається вниз) чи низької швидкості висхідний потік, для яких $V_y < \sqrt{g/K}$, а також швидкісний висхідний потік, за якого $V_y > \sqrt{g/K}.$

Спочатку побудуємо замкнені розв'язки задачі Коші, коли $V_y < \sqrt{g/K}.$

Нехай початкова швидкість така, що $v_2 > V_y.$ Тоді рівняння (21) набуває вигляду

$$\ddot{y} + K\cdot(\dot{y} - V_y)^2 = -g. \qquad (23)$$

Інтегрування виразу (23) не викликає труднощів і з урахуванням формули (22) призводить до формул

$$\dot{y} = V_y + \sqrt{\frac{g}{K}}\cdot tg\left\{\sqrt{\frac{g}{K}}\cdot(c_1 - K\cdot t)\right\};$$

$$y = V_y\cdot t + \frac{1}{K}\cdot\ln\left\{\frac{\cos\left[\sqrt{\frac{g}{K}}\cdot(c_1 - K\cdot t)\right]}{\cos\left(\sqrt{\frac{g}{K}}\cdot c_1\right)}\right\};\ \ c_1 = \sqrt{\frac{g}{K}}\cdot arctg\left[\left(v_2 - V_y\right)\cdot\sqrt{\frac{g}{K}}\right]. \qquad (24)$$

Розв'язки формул (24) описують вертикальний рух точки до моменту часу $t = t_0$, коли $\dot{y} - V_y = 0$, причому

$$t_0 = \frac{c_1}{K} = \frac{1}{\sqrt{K\cdot g}}\cdot arctg\left\{\left(v_2 - V_y\right)\cdot\sqrt{\frac{K}{g}}\right\}. \qquad (25)$$

У момент часу $t = t_0$:

$$\dot{y} = \dot{y}_0 = V_y;\ \ y = y_0 = V_y\cdot t_0 - \frac{1}{K}\cdot\ln\left(\cos\left\{\sqrt{\frac{g}{K}}\cdot c_1\right\}\right). \qquad (26)$$

У подальшому вертикальний рух точки описує рівняння

$$\ddot{y} - K\cdot(\dot{y} - V_y)^2 = -g. \qquad (27)$$

Інтегруючи його за початкових умов виразу (22) матимемо

$$\dot{y} = V_y - \sqrt{\frac{g}{K}} \cdot th\left\{\sqrt{gK} \cdot (t - t_0)\right\};$$

$$y = y_0 + V_y \cdot (t - t_0) - \frac{1}{K} \cdot \ln\left\{ch\left(\sqrt{gK} \cdot (t - t_0)\right)\right\}. \tag{28}$$

Розв'язки формул (24) і (28) дають змогу розглядати рух точки спочатку вгору, а потім униз. Оскільки $\lim\limits_{\eta \to \infty} th(\eta) = 1,$ то з формули (28) випливає

$$\lim_{t \to \infty} \dot{y} = V_y - \sqrt{\frac{g}{K}} < 0. \tag{29}$$

Отже, точка за великих значень t падає вниз, оскільки її вертикальна проєкція швидкості від'ємна.

Якщо вертикальна проєкція початкової швидкості така, що $v_2 \le V_y,$ то рух точки описує рівняння (27) з початковими умовами

$$y(0) = 0; \quad \dot{y}(0) = v_2. \tag{30}$$

Аналітичним розв'язком задачі в цьому випадку є

$$\dot{y} = V_y + \sqrt{\frac{g}{K}} \cdot \left\{\frac{1 - \bar{c} \cdot \exp(2\sqrt{gK} \cdot t)}{1 + \bar{c} \cdot \exp(2\sqrt{gK} \cdot t)}\right\},$$

$$y = V_y \cdot t + \sqrt{\frac{g}{K}} \cdot \left\{t - \frac{1}{\sqrt{gK}} \cdot \ln\left[\frac{1 + \bar{c} \cdot \exp(2\sqrt{gK} \cdot t)}{1 + \bar{c}}\right]\right\},$$

$$\bar{c} = \left|\frac{v_2 - V_y - \sqrt{g/K}}{v_2 - V_y + \sqrt{g/K}}\right|. \tag{31}$$

З формул (31) випливає, що за великих значень t точка падає вниз зі швидкістю, близькою до $V_y - \sqrt{g/K}.$

Отже, за $V_y < \sqrt{g/K}$ процес руху матеріальної точки завершується її падінням вниз.

Дослідимо далі рух точки у швидкісному висхідному потоці, коли $V_y > \sqrt{g/K}.$

Нехай вертикальна проєкція початкової швидкості така, що $v_2 > V_y.$ Точка весь час рухається вгору зі зменшуваною за величиною швидкістю. Спочатку її рух описує розв'язок формули (24), а після моменту часу $t = t_0$, коли $\dot{y} = V_y$, розв'язком формул (28).

Якщо вертикальна проєкція початкової швидкості задовольняє нерівність

$$V_y - \sqrt{\frac{g}{K}} < v_2 < V_y, \tag{32}$$

то рух точки вгору відбувається зі спадною початковою швидкістю і описаний виразом (31).

Насамкінець, коли

$$0 \le v_2 < V_y - \sqrt{\frac{g}{K}}, \tag{33}$$

задача Коші має розв'язок

$$\dot{y} = V_y - \sqrt{\frac{g}{K}} \cdot \left\{\frac{1 + \bar{c} \cdot \exp(2\sqrt{gK} \cdot t}{\bar{c} \cdot \exp(2\sqrt{gK} \cdot t) - 1}\right\},$$

$$y = V_y \cdot t + \sqrt{\frac{g}{K}} \cdot \left\{t - \frac{1}{\sqrt{gK}} \cdot \ln\left[\frac{\bar{c} \cdot \exp(2\sqrt{gK} \cdot t) - 1}{\bar{c} - 1}\right]\right\}. \tag{34}$$

Точка рухається вгору зі зростаючою швидкістю, що асимптотично прямує до значення $V_y - \sqrt{g/K}.$

За $V_y > \sqrt{g/K}$ точка рухається тільки вгору.

Якщо проєкція початкової швидкості $v_2 = V_y$, то, незалежно від величини V_y, рух матеріальної точки описано виразами (28), у яких слід покласти $y_0 = 0,\ t_0 = 0.$ За $t \to \infty\ \dot{y} \to 0,$ тобто процес руху у вертикальному напрямку прямує до зупинки, а точка – до зависання на певній висоті.

Отже, за $v_1 = V_x$ маємо велике розмаїття режимів руху у вертикальному напрямку.

Насамкінець побудуємо розв'язок рівнянь (4) для третього випадку, коли $v_1 < V_x.$ При цьому припускаємо, що $v_2 > V_y.$ Дотримання вказаних нерівностей має місце, наприклад, за дії на матеріальну точку горизонтального потоку високої швидкості.

Перейдемо до змінних $u,\ \varphi$ за формулами

$$\dot{x} - V_x = -u \cdot \cos\varphi; \quad \dot{y} - V_y = u \cdot \sin\varphi. \tag{35}$$

Як і раніше, підставляючи вирази (35) у систему (4), отримаємо

$$dt = -\frac{u}{g} \cdot \frac{d\varphi}{\cos\varphi} \tag{36}$$

і рівняння Бернуллі (12), що дає змогу визначити $u = u(\varphi).$ Тому зберігається попередній вираз (16) для $u = u(\varphi),$ але в ньому

$$\varphi_0 = arctg\left[\frac{v_2 - V_y}{V_x - v_1}\right]. \qquad (37)$$

На відміну від системи (15) тепер для обчислення x маємо

$$x = \frac{1}{g}\cdot\left\{\int_{\varphi_0}^{\varphi}\left(u^2 - \frac{V_x \cdot u}{\cos\varphi}\right)d\varphi\right\}, \qquad (38)$$

а вираз для y залишається таким самим, як і в системі (15).

З формули (38) випливає, що

$$x_* = \frac{1}{K}\cdot\left[V_x \cdot \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{g}}\cdot F_1(\varphi_0,\lambda) - F(\varphi_0,\lambda)\right]. \quad (39)$$

Для обчислення x_*, як і за $v_1 < V_x$, можна використати таблиці цих функцій, подані в роботі [1], але замінюючи в них θ_0 на φ_0.

2. Ефект реверсування руху точки зустрічним повітряним потоком

Розглянемо можливість відбиття чи реверсування польоту точки в умовах нелінійної взаємодії її з рухомим повітряним середовищем.

Реверсування руху починається з моменту часу, коли виконується співвідношення

$$\dot{x} = u\cdot\cos\varphi + V_x = 0,\;\; V_x < 0. \qquad (40)$$

При цьому змінна φ набуває значення φ^*. Підставляючи у формули (40) вираз u з системи (16), отримаємо трансцендентне рівняння

$$\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} + \ln\left(\frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}\right) = \frac{g}{K}\cdot\left(\bar{c} - \frac{1}{V_x{}^2}\right). \quad (41)$$

Чисельний розв’язок рівняння (41) і визначає $\varphi = \varphi^*$.

Процес реверсування руху проявляє себе, коли

$$\varphi_* < \varphi^* < \varphi_0, \qquad (42)$$

де φ_0, φ_* відповідають початковій і кінцевій точкам на траєкторії польоту (межі інтегрування в системі (15)). На ділянці реверсованого руху виконано нерівності

$$\varphi_* \le \varphi \le \varphi^*. \qquad (43)$$

Знаючи φ_*, можна обчислити $\max\;\; x$, бо, за формулою (15), за $V_x < 0$:

$$\max\;\; x = -\frac{1}{g}\cdot\left(\int_{\varphi_0}^{\varphi^*} u^2 d\varphi + V_x \cdot \int_{\varphi_0}^{\varphi^*}\frac{u}{\cos\varphi}d\varphi\right). \qquad (44)$$

З моменту досягнення $\max\;\; x$ починається процес реверсованого руху, і траєкторія польоту виявляється загнутою вгору або вниз зустрічним потоком. Перший варіант деформування траєкторії відбувається, коли $\varphi^* > 0$, а другий – за $\varphi^* < 0$.

Слід зазначити, що з вибором співвідношення між v_1 та v_2, за якого траєкторія руху матеріальної точки не є пологою (параметри саме таких траєкторій сильніше залежать від швидкості та напрямку повітряного потоку у площині руху частинки), ефект реверсування руху зустрічним потоком повітря найбільш відчутний. (Зрозуміло, що при цьому швидкість руху частинки має бути одного порядку зі швидкістю руху повітряного потоку.) Зокрема, за певних значень швидкості руху зустрічного потоку повітря траєкторія руху матеріальної точки може загинатися як угору, так і вниз. При цьому в першому випадку $\varphi^* > 0$, а у другому випадку $\varphi^* < 0$. Оскільки максимальна висота траєкторії y_e досягається за $\varphi = 0$, то за $\varphi^* > 0$ y_e досягається на ділянці реверсованого руху.

Розрахунки за формулою (44) показують, що зі збільшенням швидкості зустрічного потоку повітря відбувається зменшення y_e на траєкторіях польоту, чого «не вловлює» лінійна теорія руху матеріальної точки (коли сила опору рухові пропорційна швидкості руху частинки). Тут, у лінійній постановці задачі (щодо опору рухові матеріальної точки), максимальна висота траєкторії не залежить від швидкості горизонтального повітряного потоку.

Висновки.

Обґрунтовані фізико-механічна й математична моделі, які адекватно описують нелінійну динаміку, параметри й особливості руху матеріальної точки/частинки, що рухається в рухомому газоподібному (повітряному) середовищі, коли врахований квадратичний за швидкістю її руху опір зовнішнього середовища (повітря).

Отримано аналітичним шляхом інтегральне подання координат плоскої траєкторії та визначено основні характеристики руху за наявності ефекту реверсування цього руху матеріальної точки зустрічним повітряним потоком.

Отримані в роботі результати можуть бути в подальшому використані для вдосконалення й уточнення інженерних методів розрахунку в задачах зовнішньої балістики матеріальної точки для врахування квадратичного (за швидкістю руху) опору повітряного середовища, а також у задачах розкидання мінеральних добрив (сільськогосподарське виробництво), проєктування й конструювання обладнання, призначеного для проведення торкретувальних робіт із бетонними/будівельними сумішами.

Список використаних джерел

1. Балістика крапель, які випаровуються при польоті / за ред. В. П. Ольшанського. Харків: ХНТУСГ, 2007. 304 с.

2. Теоретична механіка: навч. посіб. / С. І. Кучеренко, В. В. Бурлака, Л. М. Тищенко та ін. Харків: ХНТУСГ, 2012. 568 с.

3. Апостолюк О. С., Воробйов В. М., Ільчишина Д. І.. Теоретична механіка : зб. задач : навч. посіб. для студ. вузів / за ред. М. А. Павловського. Київ : Техніка, 2007. 400 с.

4. Задорожний А. О., Стаховський О. В., Човнюк Ю. В., Бугаєвський С. О. Застосування функції Ламберта в процесі аналітичного розв’язання задач балістики для пологих траєкторій польоту матеріального тіла з урахуванням газоподібного (повітряного) середовища. *Комп’ютерні науки та інформаційні технології. Вісник ХНАДУ.* 2024. Вип. 106. С. 132-137. DOI: 10.30977/BUL.2219-5548.2024.106.0.132.

5. Аналітичні розв’язки спрощених рівнянь руху у задачах балістики матеріальної точки / А. О. Задорожний, Ю. В. Човнюк, О. В. Стаховський та ін. *Сучасні технології та методи розрахунків у будівництві*. Луцьк: ЛНТУ, 2024. Вип. 22. С. 67-69. URL: https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2024-12(22)-07.

6. Розв’язок задачі зовнішньої балістики матеріальної точки із урахуванням нелінійного (квадратичного) опору повітряного середовища / Ю. В. Човнюк, П. П. Чередніченко, Н. С. Шудра та ін. *Матеріали X Міжнародної науково-технічної конференції «АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ ІНЖЕНЕРНОЇ МЕХАНІКИ», Одеса 5−7 червня 2024*. Одеса: ОДАБА, 2024. С. 256.

7. Zadorozhnyi A., Stakhovsky O., Chovnyuk У., Buhaievskyi S., Shutovskyi O. Analytical solutions of simplified equations of a Material point in ballistics problems for trajectories Of motion with an angle inclination to the horizon Close to 90º. *10-та Міжнародна науково-технічна конференція «Проблеми надійності та довговічності інженерних споруд і будівель на залізничному транспорті», Харків, 20-22 листопада 2024 р.: тези доповідей*. Харків: УкрДУЗТ, 2024. С. 73-74.

8. Corless R. M., Gonnet G. H., Hare D. E. On the Lambert W function. *Adv. Comput. Math.* 1996. Vol. 5. P. 329-359.

9. Заїка П. М. Теорія сільськогосподарських машин для приготування та внесення добрив. Харків: Око, 2002. 342 с.

10. Заїка П. М. Теорія сільськогосподарських машин. Зернозбиральні машини. Харків: Око, 2004. 402 с.

11. Запольський Л. Л. Моделювання траєкторії доставки засобів пожежегасіння методом метання. Геометричне та комп’ютерне моделювання. Харків: ХДУХТ, 2004. Вип. 5. С. 106-113.

12. Ловейкін В. С., Човнюк Ю. В., Дитюк А. І. Дослідження дальності польоту частинок твердих мінеральних добрив шляхом моделювання. *Конструювання, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин*. Кіровоград: КНТУ, 2009. Вип. 39. С. 82-90.

13. Росоха С. В. Методи геометричного моделювання в задачах пожежної безпеки. Харків: Академія цивільного захисту України, 2004. 175 с.

14. Рева Г. В., Куценко Л. М., Росоха С. В. Анімаційне комп’ютерне моделювання деяких процесів в задачах пожежної безпеки. *Проблемы пожарной безопасности. Юбилейный выпуск.* Харьков: АПБУ, 2003. С. 147-163.

15. Ольшанский В. П., Кучеренко С. І., Бурлака В. В., Малец О. М. До розрахунку дальності польоту частинок у газовому середовищі. К расчёту дальности полёта частиц в газовой среде. *Вісник ХНТУСГ: Сучасні напрямки технології та механізації процесів переробних і харчових виробництв*. Харків: ХНТУСГ, 2012. Вип. 131. С. 33-38.

16. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Інверсія розв’язку Дідіона в задачі балістики матеріальної точки теоретичні та прикладні проблеми фізики. *Наукові вісті НТУУ «КПІ».* Київ, 2013. 4. С. 145 -147.

17. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Функція Ламберта в задачі балістики матеріальної точки. *Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях.* Харків: НТУ «ХПІ», 2013. № 5 (979). С. 220-224.

PhD (Tech.) A. Zadorozhnyi, Dr. Sc. (Tech.) O. Stakhovsky

NONLINEAR DYNAMICS OF A MATERIAL POINT IN A MOVING GASEOUS MEDIUM

I. INTEGRAL REPRESENTATIONS OF COORDINATES OF A PLANE TRAJECTORY AND THE EFFECT OF MOTION REVERSAL BY A COUNTERFLOW OF AIR

Abstract. *The problems of ballistics of a material point are classical. For many years they have been traditionally taught in textbooks on theoretical mechanics in the section on the dynamics of a material point. But the interest in these problems is connected not only with the* *educational process, but also with their numerous applications in various fields of human activity. These are calculations of shooting accuracy in military affairs, modeling of processes of scattering of fertilizer particles and pneumatic separation of grain mixtures in agricultural production, research of dynamics of particles of sprayed jets during fire extinguishing and during irrigation of plants, calculations of transport of fine particles by air flows in ecology, analysis of efficiency of use of special equipment of the construction industry in problems of shotcrete of concrete mixtures, etc. Therefore, the problems of ballistics of a material point are considered not only in courses on theoretical mechanics, but also in special literature. The purpose of this article is to substantiate the model of the motion of a material point in the conditions of its interaction with a moving air environment in external ballistics problems and on this basis to determine the main parameters of such types of motion trajectories (of the flat type). A similar approach allows us to consider the main effects and determine the main parameters of the possible effect of reversing the motion of a material point by an oncoming air flow.*

Keywords: *analytical approach, solution, nonlinear dynamics, material point, moving air medium, quadratic resistance in speed, external ballistics problems, integral representations of coordinates, flat trajectory, motion reversal effect, oncoming air flow.*

Задорожний Андрій Олексійович, кандидат технічних наук, доцент, старший викладач кафедри бронетанкового озброєння та військової техніки, Військовий інститут танкових військ Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». ORCID iD: 0000-0002-1031-0585. Тел.: +38 (066) 931-28-78. E-mail: zsnj1971@ukr.net.
Стаховський Олег Валерійович, доктор технічних наук, професор кафедри військової підготовки, Національний Університет Оборони. ORCID iD: 0000-0002-9808-6302. Тел.: +38 (050) 254-75-28. E-mail: dr.stahman@gmail.com.

Zadorozhnyi Andriy Oleksiyovych, Associate Professor, PhD., Senior Lecturer, department of armored weapons and military equipment, Military Institute of Tank Troops of the National Technical University «Kharkov Polytechnic Institute». ORCID iD: 0000-0002-1031-0585. Tel.: +38 (066) 931-28-78. E-mail: zsnj1971@ukr.net.
Stakhovsky Oleg Valeriyovych, Dr. Sc. (Tech.), professor of the department of military training National Defense University. ORCID iD: 0000-0002-9808-6302. Tel.: +38 (050) 254-75-28. E-mail: dr.stahman@gmail.com.