

УДК 621.396

АЛЁШИН Г.В., д.т.н., профессор (Украинский государственный университет железнодорожного транспорта)

## Метод функционала правдоподобия в теории радиосистем

*Центральным понятием в теории радиолокации и радиоизмерений является функционал правдоподобия (ФП), который используется для синтеза оптимальных алгоритмов, выбора структуры систем, сигналов и параметров и влияет на потенциальную точность измерений.*

*В работе обосновывается, что в отличие от функции правдоподобия, которая используется в статистике и при обработке массива измерений, «функционал правдоподобия» в интегральном представлении по Вудворду, Миддлону и др., использовать нецелесообразно.*

**Ключевые слова:** функционал правдоподобия, радиосистемы, потенциальная точность.

### Вступлення

Работа относится к теории радиолокации и связи и предназначена для определения возможности использования функционала правдоподобия для синтеза оптимальных алгоритмов, структуры систем, сигналов, параметров и для получения потенциальной точности измерений.

Известная функция правдоподобия широко используется в статистике и при обработке результатов измерений. Однако «функционал правдоподобия» в интегральной форме по Вудворду и др., как показали исследования, нерационально и некорректно использовать при любом применении. Между тем, этот функционал в современном многомерном представлении до сих пор используется или упоминается у многих известных авторов. Актуальность работы в том, чтоб не тиражировать (не размножать) ошибки.

### Анализ известных публикаций

Со времени публикации книги известного автора Вудворда [1], где, наверное, впервые опубликован материал о функционале правдоподобия (ФП), в мире появилось почти сотни тысяч работ тоже известных специалистов, которые или упоминали про ФП, или использовали его в разнообразных формах для оптимального синтеза алгоритмов, систем и сигналов, например, [1 - 4] и др.

Поэтому в работе основное внимание уделено определению правомерности использования ФП для построения радиотехнических систем.

Причем, авторитет Вудворда [1], Миддлтона и других был настолько велик, что множество ученых мира в области радиолокации и связи [1 - 4] и другие в различной форме использовали и размножали ФП большими тиражами, и делают это до сих пор.

В чем сущность ошибки изложено далее.

Чтобы разобраться в этом вопросе, рассмотрим сначала для сравнения физическое понятие, известное в статистике как *функция правдоподобия*, которая используется при обработке результатов измерений, и понятие *функционал правдоподобия*.

**Цель исследований** – поиск и анализ полезных возможностей функционала правдоподобия, которые, все же, приводят к выводу, что использование функционала правдоподобия, как это делается в настоящее время, нерационально и некорректно.

### Основной материал

Метод использования функции правдоподобия оказало значительное влияние на науку статистических исследований, которые явились фундаментом для формально-логического развития прикладных наук.

В тридцатых годах двадцатого века логическим следствием функции правдоподобия стало появление его интегрального представления в виде функционала правдоподобия (ФП) для случая гауссовых шумовых случайных процессов, которое получило широкое применение в радиотехнике, в теориях оптимального синтеза сигналов, структуры и параметров систем и в обосновании их оптимальности.

Однако еще в прошлом столетии появились сомнения в корректности о применения ФП, поскольку оно противоречило широкому ряду примеров на практике. Например: 1) положение о том, что оптимальный сигнал для измерения сдвига частоты должен представлять собой две расстроенные во времени дельта-функции, не соответствуют действительности, т.к. используется гармоника, 2) высокоточный многошкальный фазовый метод измерений не получает теоретической поддержки от ФП, то есть, ничем не обоснован, 3) «потенциальная» точность гораздо хуже в точке максимума ФП, чем при расстройке, где крутизна выше, и это противоречит

реальной метрологии, где точность определяется наибольшей крутизной, 4) байесовская теория приема, то есть, обнаружение сигналов и измерение параметров, неправомерно опирается на ФП, который некорректный, 5) синтез сигналов по теории ФП, с использованием второй производной сигнальной функции, не является оптимальным, 6) в теории измерений на базе ФП в отличие от обычной метрологии нет места для использования фундаментальных понятий: а) о шкалах, б) о дискриминаторных характеристиках и в) о связанном с ними понятии чувствительности измерителей и т.д.

Далее показано, как используется ФП по Вудворду в радиосистемах.

Чтобы определить различие в понятиях функции правдоподобия и ФП, необходимо сначала рассмотреть физическую сущность первой.

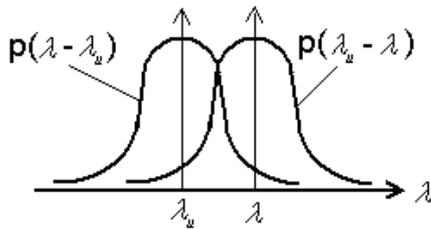


Рис. 1. Плотность распределения вероятности реализаций измерений и функция правдоподобия

Если для калибровки шкалы измерителя сначала измерять какую-нибудь эталонную, практически истинную величину  $\lambda_{и}$ , то получим гистограмму и распределение  $p(\lambda - \lambda_{и})$  реализаций  $\lambda$  в окрестности ее истинной величины (рис. 1). Теперь измерим неизвестную величину  $\lambda$  и получим первую точечную оценку.

Далее естественно считать, что истинное значение неизвестной величины распределено относительно оценки таким же образом, с тем же распределением  $p(\lambda_{и} - \lambda_i)$ , но в окрестности оценки  $\lambda_i$  (рис. 1). Это и есть функция правдоподобия, которая полезна в статистике и при обработке результатов измерений тем, что совокупность оценок позволяет за счет дальнейшего накопления независимой статистики (результатов измерений) повышать точность и надежность результатов по отношению к случайной погрешности.

Для  $m$  независимых измерений результирующая функция правдоподобия равна произведению функций правдоподобия всех измерений. За счет этого результирующий функционал имеет в  $m$  раз меньшую дисперсию за счет случайной стационарной погрешности.

Необходимо определить, чем отличается функционал правдоподобия по своим свойствам от функции правдоподобия.

#### Функционал правдоподобия по Вудворду

Как отмечено, известная функция правдоподобия играет важную роль как в статистике, так и в теории обработки результатов измерений. Она является основой для принятия решения о точности и надежности серии измерений в условиях влияния случайной погрешности на их результаты за счет введения понятия интервальной оценки, или доверительного интервала. Более детальное рассмотрение нормально распределенного стационарного шума позволяет получить по Вудворду плотность распределения параметра сигнала, то есть, к получению функционала правдоподобия (ФП).

Функционал правдоподобия на вид много обещает. Похоже, что найдена основа для создания теории оптимальных радиосистем, оптимальных алгоритмов, сигналов, структур и параметров. Однако объективное рассмотрение далее показывает, что использовать ФП для тех целей нерационально и некорректно.

Так образовалась большая *пропасть* между некорректными положениями теориями оптимальности радиоэлектронных систем [7] и эффективностью и принципами действия реальных систем [6]. Не случайно, что промышленники при построении реальных радиоэлектронных систем, как правило, не пользуются результатами таких теорий.

#### В чем суть ФП?

По Вудворду многомерную плотность распределения вероятности коррелированного шума можно представить в виде произведения плотности распределения вероятности взаимонезависимых отрезков гауссового шума, что вполне корректно.

$$p[n(t_1), n(t_2) \dots n(t_n)] = \prod_{i=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{n^2(t_i)}{2\sigma^2}\right],$$

где  $\sigma^2$  - дисперсия шума  $n(t)$ ,  $m = T / \Delta t$ ,  $\Delta t$  - время корреляции,  $T$  - длительность процесса.

Если числитель и знаменатель под знаком  $\exp$  умножить на  $\Delta t$  и устремить его к нулю, а число  $m$  - к бесконечности, то получим

$$p[n(t)] = K_y \exp\left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T n^2(t) dt\right], \quad (1)$$

где  $\sigma^2 \Delta t = \sigma^2 / \Pi = N_0$  - спектральная плотность шума.

На вход радиоприемного устройства поступает

смесь  $y(t)$  сигнала  $S(t, \lambda_u)$  с неизвестным истинным параметром  $\lambda_u$  с шумом  $n(t)$

$$y(t) = S(t, \lambda_u) + n(t). \quad (2)$$

Подставляя выражение для шума из формулы (2) в формулу (1), получим ФП похожий на функцию правдоподобия, где есть смесь  $y(t)$  сигнала (с истинным неизвестным параметром  $\lambda_u$ ) с шумом и сигнал с тем же истинным параметром  $\lambda_u$

$$p[y(t) / \lambda_u] = K_y \exp \left[ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [y(t) - S(t, \lambda_u)]^2 dt \right]. \quad (3)$$

Возьмем этот же функционал относительно полученной смеси  $y(t)$  как плотность распределения вероятности самого сигнала с неизвестным параметром  $\lambda_u$ . Это и есть функционал правдоподобия (ФП)

$$p[S(t, \lambda_u) / y(t)] = K_y \exp \left[ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [S(t, \lambda_u) - y(t)]^2 dt \right]. \quad (4)$$

ФП похож на функцию правдоподобия: есть реализация  $y(t)$  как результат приема, или измерения, есть временная функция от истинного параметра и есть в целом многомерная, или бесконечномерная, плотность распределения истинного параметра  $\lambda_u$ , который нужно оценить.

Первая нестыковка с логикой состоит в том, что  $\delta$ -коррелированный шум, для которого написан ФП (4), имеет бесконечную ширину спектра и поэтому возможен только вне системы. А в системе в частотной полосе сигнала шум коррелирован. Его время корреляции соизмеримо с длительностью простых сигналов, или сложных шумоподобных сигналов после согласованной обработки. Мы имеем дело, во-первых, лишь с одной реализацией смеси  $y(t)$ , во-вторых, с одним интервалом корреляции, поэтому нормальный закон справедлив лишь для какого-то одного значения шума в интервале корреляции, в пределах которого остальные значения шума коррелированы с ним, поэтому, в-третьих, вообще не может быть интеграла (4). И только для широкополосных сигналов число степеней свободы, или база, значительно больше единицы. Но оптимальная обработка сигнала реализует энергетический потенциал, и сигнал на выходе становится простым. Предельный переход в формуле (1) после оптимального приема невозможен.

Усреднить функцию  $y(t)$  как временной процесс при многократном повторении возможно, например, с помощью, рециркулятора, или с помощью записи и повторения процесса. Однако это явно сложно, неэкономично и нерационально, особенно при наличии систематической погрешности, которая тоже растет с ростом числа измерений. То есть, использовать обработку результатов измерений такую, как в случае функции правдоподобия, сложнее ввиду того, что сигнал – это временной процесс.

Тут необходимо усложнение измерителя, чтобы получить оценку параметра из смеси сигнала с шумом. А уже потом принимать меры для оценки сигнала и истинного параметра. Это можно сделать методом МНК, но с ограниченной точностью, потому что есть только одна реализация смеси  $y(t)$ . От есть, даже если смесь сигнала с шумом мы приняли, но параметр из смеси - реализации еще надо определить.

Вторая нестыковка с логикой – это ошибка Вудворда и его последователей, которая состоит в предположении: *естественно считать, что параметр  $\lambda_u$  (в его случае - задержка во времени) в принятом сигнале, известный, а нужно оценить истинный параметр сигнала в смеси.*

Но этого допущения делать нельзя, потому что это смещает плотность распределения вероятности сигнала с истинным параметром как временного процесса на случайную величину, и это уже не ФП и не функция правдоподобия. Если теперь повторять реализации, то будет накапливаться и эта волонтаристски введенная систематическая погрешность.

Кроме того, разницы параметров в сигнале и в смеси сигнала с шумом не должно быть согласно формулы (2). Иначе не будет исходного нормального (гауссового) распределения шума.

Назначение другого, не истинного параметра означает появление разности параметров в формуле (4), которая как уже ясно, что не должна существовать, по сути означает дополнительно волонтаристское решение, из которого можно получить, что угодно.

Такая подмена одного из параметров приводит к появлению разности параметров и к появлению, как в сказке, функции автокорреляции (ФАК) сигнала. Правда, может показаться, что это правильно, потому что напоминает согласованную фильтрацию [5], но это некорректно и приводит к некорректным выражениям в точности и к прочим ошибкам. Кроме того, для получения ФАК не нужен ФП.

Отсюда можно получить, и до сих пор получают, «оптимальный» алгоритм измерений и обнаружений, структуру системы, так называемую, «потенциальную» точность, сигналы и параметры для различных сложных, многомерных векторных моделей процессов помех и сигналов [1 - 4].

Про ошибку Вудворда настораживали как

указанные ранее причины, так и, например, *парадоксы «потенциальной» точности, синтез явно неоптимальных сигналов, алгоритмов и структур систем.*

Например, согласно ФП, дисперсия потенциальной точности измерений параметра  $\lambda$  равна

$$\sigma_{\lambda}^2 = \frac{1}{q\ddot{\Psi}_{\lambda}(\lambda_0)}, \quad (5)$$

где  $\ddot{\Psi}_{\lambda}(\lambda_0)$  - вторая производная (кривизна) сигнальной функции автокорреляции в точке максимума,  $q$  - отношение мощностей сигнала и шума.

Согласно формуле (5) для повышения точности при измерениях задержки сигнала спектр автокорреляционной функции должен быть в идеале – это две дельта-функции, расстроенные по частоте. Такой сигнал не используется. Наоборот, для измерения частоты форма автокорреляционной функции должна быть – две дельта-функции по времени. Такие сигналы также не используются. А наоборот, используется узкополосный сигнал. Для часто применяемого случая, когда сигнал прямоугольный, а сигнальная функция - треугольная с бесконечной кривизной, согласно формулы (5), дисперсия должна равняться нулю, чего практически нет.

Следящие измерители вообще никогда не используют автокорреляционную функцию в максимуме, поскольку погрешность при этом больше, и нельзя получить одной оценкой знак отклонения от максимума (экстремальное регулирование). Цифровые измерители также работают по другим принципам.

При такой теории неясна, например, какая оптимальность у многошкальных измерителей.

Более того, в зависимости от того, какую функцию сигнала в ФП с каким параметром разложить в ряд Тейлора, можно получить различные зависимости дисперсии погрешности измерений: от квадрата первой производной от сигнала, или от второй производной от сигнала, что не одно и то же.

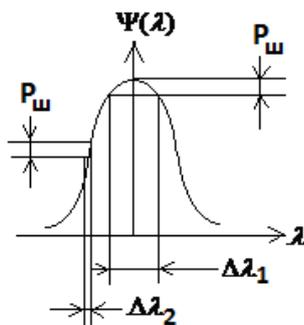


Рис. 2. Погрешность  $\Delta\lambda_2$  меньше на склоне автокорреляционной функции  $\Psi(\lambda)$

Ясно, что повышение точности измерений задержки сигналов зависит и от ширины спектра. Но это вытекает не из теории потенциальной точности, а при повышении крутизны фронтов сигнала на выходе приемника и на входе измерителя, что известно в метрологии как повышение чувствительности.

Единственная польза от теории потенциальной точности, что это подтолкнуло специалистов к разработке теории широкополосных шумоподобных сигналов, которая тоже не является результатом использования ФП.

Более того, исследования процессов измерений показали (рис. 2), что наибольшую точность можно достичь не в точке максимума ФП или автокорреляционной функции, а в той точке сигнала или сигналов, где максимальная крутизна характеристики измерителя, которая в метрологии определяет чувствительность и которая находится на склоне ФАК.

Теория потенциальной точности, вытекающей из принципа максимума ФП, противоречит метрологии также в том, что она не определяет функционально метод измерений, характеристику измерителя, физический априорный доверительный интервал, влияющий на точность, то есть нет физической трактовки.

Возникает вопрос, а вообще возможна ли реализация ФП для измерений параметров сигнала. Из литературы известно, что возможна, но это вытекает не из ФП.

Первый путь – это многоканальный измеритель [6] с расстроенными по параметру каналами, или ФАК, которые перекрываются на уровне половины максимума функции автокорреляции. Преимущество – это быстродействие во всем диапазоне. Недостатки – громоздкость, стоимость, многозначность решений при большом уровне сигнала, не вполне высокая точность.

Второй распространенный путь – это перестройка сигнальной функции, или ФАК, в диапазоне параметра [6]. Преимущества – простота, широкий диапазон параметра. Недостатки – это задержка во времени, динамический эффект при быстрой перестройке, возможный пропуск импульсного сигнала при медленной перестройке.

Есть также другие методы, например, многоточкальные, цифровые, комбинированные и другие [6], но и тут ФП ни при чем.

Синтез сигналов и структур систем также некорректно проводить при использовании ФП в интегральном виде.

## Выводы

Таким образом показано, что метод максимума функционала правдоподобия в интегральном варианте Вудворда некорректен, однако под этим названием встречаются также другие методы применения

сигнальных функций. Теория радиосистем и радиоизмерений требует дальнейших исследований относительно оптимальности систем, потому что существующая теория неадекватна реальным системам.

#### Литература

1. Вудворд Ф.М. Теория вероятности и теория информации с применением в радиолокации. М.: Сов. радио, 1968.
2. Ширман Я.Д., Манжос В.Н. Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. М.: «Радио и связь», 1981, с.416.
3. Ван Трис. Теория обнаружения, оценок и модуляции. М.: Сов. радио, 1972. Т.І.
4. Фалькович С.Е. Оценка параметров сигналов. М.: Сов. Радио, 1970.
5. Колмогоров А.Н. Интерполяция и экстраполяция стационарных случайных последовательностей // Изв. АН, СССР, сер. мат. 1941, № 5.
6. Алешин Г.В. Эффективность сложных радиотехнических систем./Г.В. Алешин, Ю.А.Богданов. - Київ, «Наукова думка», 2009, с.288.
7. Альошин Г.В. Особливості реалізації функціоналу правдоподібності. // Зб.наук. праць.- Харків: УкрДАЗТ, 2009, вип. №2, с.3-8.

**Альошин Г.В. Метод функціоналу правдоподібності у теорії радіосистем.** Центральним поняттям в радіолокації та радіовимірах є функціонал правдоподібності (ФП), який використовується для синтезу оптимальних алгоритмів, вибору структури систем, сигналів, параметрів і для отримання потенціальної точності вимірів. У роботі обгрунтовується, що на відміну від функції правдоподібності, яка використовується у статистиці та при обробці масиву вимірювань, «функціонал правдоподібності» в інтегральному представленні за Вудвордом, Мідлтоном та інш., використовувати недоцільно.

**Ключові слова:** функціонал правдоподібності, радіосистеми, потенціальна точність.

because harmonics is used, 2) LF does not explain high quality of multiscale measurement method, i.e. it isn't grounded, 3) "potential" precision is much worse at the maximum point of LF than under off-tuning where steepness is higher, 4) Bayesian reception theory using LF isn't correct, 5) the synthesis of signals according to LF theory using the second derivative of a signal function is not optimal, 6) fundamental notions: a) about scales, b) about discriminator characteristics and c) about the notion of measuring devices sensitivity, connected with them etc., are not used in the theory of measurements based on LF.

It is shown, that the usage of LF according to Woodward in radio systems is irrational and incorrect.

**Key words:** functional likelihood, radio systems, high accuracy.

Рецензент д.т.н., професор Бойник А.Б. (УкрГУЖТ)

*Поступила 16.11.2015 р.*

*Алешин Г.В., доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Транспортная связь» Украинского государственного университета железнодорожного транспорта, Харьков, Украина.*

*Aloshin G.V., Doctor of Technical Science, Professor, Professor Transport Communication Ukrainian State University of Railway Transport, Kharkov, Ukraine.*

**Aloshin G.V. The likelihood functional method in radio system theory.** The analysis of possibilities of likelihood functional (LF) usage according to Woodward in the theory of radio systems is presented.

It was in the twentieth century when there appeared doubts as to the reasonableness of LF usage as it contradicted to a wide range of examples in practice. For example: 1) the statement concerning the fact that optimal signal for measuring frequency shift must present two off-tuned in time delta functions does not represent the facts