

ДАРЕНСЬКИЙ О. М., д-р техн. наук,  
МАЛІШЕВСЬКА А. С., аспірант (Український державний університет залізничного транспорту)

### Математична модель системи «екіпаж – колія» для умов метрополітену

З урахуванням специфічних особливостей роботи шляхів метрополітену запропоновано математичну динамічну систему «екіпаж – колія». Підсистема «екіпаж» подана як структура, складена із твердих недеформованих елементів кузов – візок – колісні пари, які з'єднані між собою системою шарнірів (шворні) пружних (ресори) і демпфівувальних (гасителі коливань) елементів. Надано математичну модель коливань елементів цієї підсистеми.

Розглянуто вертикальні кінематичні і силові зв'язки підсистеми «колія» і «екіпаж».

Силові зв'язки підсистеми «екіпаж» і «шлях» переглянуті з урахуванням можливості виникнення пружних і дисипативних сил. Математично реалізовано важливе положення про те, що колеса вагона метрополітену і поверхні катання головок рейок мають односторонній зв'язок. Таке положення передбачає використання надалі розрахункової схеми шляху як балки, на пружно-дисипативних опорах.

**Ключові слова:** динамічна система «екіпаж – колія», поточний ресурс верхньої будови колії.

#### Вступ

Одним з найважливіших факторів, який впливає на безперебійність, безпеку та інші показники роботи рейкового транспорту, є стан верхньої будови колії. Особливо важливо це враховувати в умовах метрополітенів, оскільки цей вид транспорту призначений для масового перевезення пасажирів і має найвищу інтенсивність руху.

При цьому, лінії метрополітенів мають специфічні особливості експлуатації. Крім вищезгаданих масовості перевезень пасажирів та високої інтенсивності руху, лінії метрополітенів відрізняються безліччю кривих малого радіуса, регулярно чергуються схилами та підйомами, що сприяє підвищеному зносу верхньої будови колії (ВБК). При цьому істотно ускладнюється проведення ремонтних робіт через обмеженість габаритів тунелю, наявності третьої рейки, а також через обмеження за часом, що пов'язано із жорстким добовим графіком роботи метрополітену.

З урахуванням викладеного вище, для ліній метрополітенів надзвичайно актуальними є дослідження, що дозволяють скоротити обсяг капітальних ремонтних робіт у тунелях, що дуже важливо для функціонування підприємств в умовах обмежених ресурсів.

До таких, насамперед, слід віднести дослідження з оцінки можливостей повторного використання старопридатних рейок. Необхідною вимогою при цьому є визначення залишкового ресурсу ВБК і, в тому числі наявності дефектів рейок у зоні контакту колеса з рейкою.

#### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Тема досліджень цієї статті, яку у загальному вигляді можна відобразити як «Дослідження міцності верхньої будови залізничної колії», має велике поширення в усьому світі, зокрема в Україні і ближньому зарубіжжі [1 – 6].

У більшості літературних джерел розглядаються питання жорсткості ВБК до пружних вертикальних і горизонтальних сил з боку рухомого складу. При цьому застосовуються різні методи дослідження:

- експериментальні [1, 7];
- математичного модулювання [2, 9];
- теоретичні [3, 4 – 6].

Багато уваги в сучасній науково-технічній літературі приділяється питанням взаємодії рухомого складу і верхньої будови колії з застосуванням обчислювальної техніки. Так, в роботі [7] проведено теоретичні та експериментальні дослідження пружних якостей системи колесо – рейка в умовах дії негативних факторів. Як приклад проведено комп'ютерне моделювання взаємодії вантажного вагона із залізничною лінією, одна з рейок якої має пошкодження у вигляді гофрованої поверхні. Ця тематика розглядається і у роботі [8] – досліджуються динамічні характеристики системи колесо – рейка на кривих ділянках залізничної колії. Наводяться механізми і методика комп'ютерних розрахунків цих характеристик залежно від впливу параметрів рухомого складу і від параметрів колії.

У роботі [9] подано математичну модель для оцінювання реальних умов експлуатації залізничного рухомого складу, з урахуванням випадку, коли колесо втрачає контакт із рейкою. Математичне моделювання показало, що амплітудні характеристики флюктуацій

залежать від функцій шорсткості і швидкості руху колеса. При розрахунку динамічних процесів, контакт між колесом і рейкою слід вважати нестабільним. Зі збільшенням швидкості вплив цієї нестабільності зростає. Тому особлива увага в дослідженнях приділяється питанням підвищення безпеки для ліній швидкісного руху [10].

Проведений аналіз літературних джерел показує, що особливості умов експлуатації ліній метрополітену і проблеми, які у зв'язку з цим виникають, поки ще не мають вирішення. Тому надзвичайно актуальними є дослідження цієї статті, що спрямовані на скорочення обсягу капітальних ремонтних робіт у тунелях, що є дуже важливим для функціонування підприємств в умовах обмежених ресурсів.

Особливістю проведеної роботи, описаної у цій статті, є поєднання можливостей теоретичних досліджень з математичним моделюванням та отримання результату чисельними методами.

#### Визначення мети та задачі досліджень

Метою досліджень є розроблення засобів (алгоритмів та програмного забезпечення), які дають змогу за допомогою сучасної обчислювальної техніки, виявити показники ресурсу колії метрополітену в умовах впливу на неї вертикальних та горизонтальних сил, що діють з боку рухомого складу.

Для досягнення цієї мети необхідно вирішити такі основні задачі:

1. Вибрати розрахункову схему динамічної системи «екіпаж – колія».
2. Розробити математичну модель підсистеми «екіпаж».
3. Розробити алгоритми і програму розрахунків показників експлуатаційного ресурсу колії метрополітену.

#### Основна частина досліджень

Як показує аналіз світової літератури, у більшості досліджень, в яких розглядалися питання взаємодії колії і рухомого складу, визначалися вертикальні або горизонтальні поперечні сили, які діють на колію при русі екіпажів у прямих і кривих ділянках колії.

Але в метрополітенах, за умов кривих малого радіуса, особливостей спеціального рухомого складу, та особливостей режимів його руху, наявні істотні нелінійності функцій, у тому числі нелінійності розривного типу. Оскільки для нелінійних систем принцип суперпозиції неможливо застосувати, дослідження необхідно було проводити на нелінійній просторовій моделі.

До розрахунків було прийнято розрахункову схему чотиривісного екіпажа з урахуванням конструктивних особливостей вагонів метро.

У роботах [1 - 3] використані плоскі математичні моделі екіпажів, і при визначенні характеристик

взаємодії екіпажа і колії використовувалися поняття «вертикальна жорсткість колії» і «горизонтальна жорсткість колії». Ці характеристики були прийняті постійними. Проте аналіз особливостей улаштування і роботи колії під дією рухомого складу метрополітену показує, що такі припущення не прийнятні.

Тому при виборі розрахункової схеми і математичної моделі динамічної системи «екіпаж-колія» були прийняті такі головні допущення:

- кузов екіпажа, обресорені і не обресорені частини візка вважаються абсолютно твердими тілами, деформації яких не враховуються;
- в екіпажі можливість деформації враховується тільки в підвісках, пружні елементи яких мають лінійні і нелінійні характеристики, при цьому маса цих елементів не враховується;
- рейки вважаються балками великої довжини незмінного перетину, що лежать на опорах, які володіють пружно-дисипативними властивостями у вертикальній і горизонтальній площинах;
- для спрощення розрахункової схеми приймається рівність параметрів однойменних елементів, тобто всі колісні пари, обресорені частини візка, ресорні комплекти і т.д. аналогічні;
- при визначенні горизонтальних силових реакцій між колесами і рейками враховується те, що у кожній колісній парі колеса жорстко сполучені з віссю і тому, при русі екіпажа, обертаються з однаковою кутовою швидкістю;
- у вертикальній площині колеса і рейки мають однобічний зв'язок.

З урахуванням вищевказаного, на рис. 1 подано прийнятну розрахункову схему чотиривісного екіпажа, що враховує його просторові коливання.

При русі екіпажа з постійною швидкістю кількість лінійних і кутових переміщень його елементів дорівнює сімнадцяти, які позначені на рис. 1 через незалежні координати підсистеми  $q_i$  -  $q_{17}$

За умови, що екіпаж рухається з постійною швидкістю, його коливання за прийнятою розрахунковою схемою описуватимуться системою рівнянь (1).

На рис. 1 і в системі рівнянь (1) прийняті такі позначення:

$M$  – маса підресорених елементів вагона, кг;

$m_T$  – маса непідресорених елементів візка, кг;

$I_{YK}$ ,  $I_{ZK}$ ,  $I_{KX}$  – відповідно моменти інерції підресорених елементів вагона відносно осей  $Y$  і  $Z$  та момент інерції кузова вагона відносно осі  $X$ , яка проходить на рівні п'ятників вагона, кг·м<sup>2</sup>;

$I_{YT}$ ,  $I_{ZT}$ ,  $I_{TX}$  – момент інерції непідресорених елементів візків відносно осей  $Y$  і  $Z$ ,  $X$ , кг·м<sup>2</sup>;

$J_{\delta X}$  – момент інерції надресорної балки відносно осі  $X$ , кг·м<sup>2</sup>;

$2\lambda$  – відстань між центрами шворнів, м;  
 $H_0$  – відстань від площини п'ятника до центру мас, м;  
 $2d$  – діаметр п'ятника вагона, м;  
 $2\vartheta_1$  – відстань між ковзунами, м;  
 $2a$  – база візка, м;  
 $2\vartheta$  – відстань між серединами ресорних комплектів, м;  
 $H_1$  – відстань від осі колісної пари до площини п'ятника, м;  
 $Q_{zk}$  – горизонтальна бічна результуюча зовнішніх сил, діючих на кузов, Н;  
 $Q_1$  і  $Q_2$  – горизонтальні поперечні реакції ресорних комплектів першого і другого візка, Н;  
 $Q_{hk}$  – горизонтальна складова сил ваги кузова, викликана піднесенням зовнішньої рейки, м;  
 $Q_{hT1}$ ,  $Q_{hT2}$  – горизонтальні складові сил ваги візка, викликані піднесенням зовнішньої рейки, Н;  
 $P_1, P_2, P_3, P_4$  – вертикальні реакції ресорних комплектів першого і другого візків, Н;  
 $P_{T1}$  і  $P_{T2}$  – реакції, діючі на п'ятники вагона з боку підп'ятників візків, Н;

$B_{1np}, B_{2np}, B_{1л}, B_{2л}$  – вертикальні реакції на правих і лівих ковзунах першого і другого візка, Н;  
 $M_{mp1}, M_{mp2}$  – моменти сил тертя, що виникають у шворневих перетинах при поворотах першого і другого візків у горизонтальній площині, Н·м;  
 $R_{1-8}$  – вертикальні реакції, які діють на колесо з боку колії, Н;  
 $N_{1-4}$  – результуючі горизонтальних поперечних сил взаємодії коліс і рейок, Н;  
 $M_{n1}, M_{n2}, M_{n3}, M_{n4}$  – моменти поздовжніх складових сил тертя коліс по рейках для 1-4 колісної пари, Н·м;  
 $r_{1-8}(t)$  – радіуси кругів катання коліс у точках контакту колеса і рейки, м;  
 $S_{1-8}(t)$  – відстані від середини колісних пар до точок контакту колеса і рейки, м;  
 $g$  – прискорення вільного падіння, м/с<sup>2</sup>;  
 $V$  – швидкість руху екіпажів, км/год;  
 $\rho_{xoz}$  – радіус кривизни колії, відповідний центру ваги кузова екіпажа, м;  
 $\rho_{xm1}, \rho_{xm2}$  – радіуси кривизни колії, відповідні центрам ваги першого і другого візків, м.

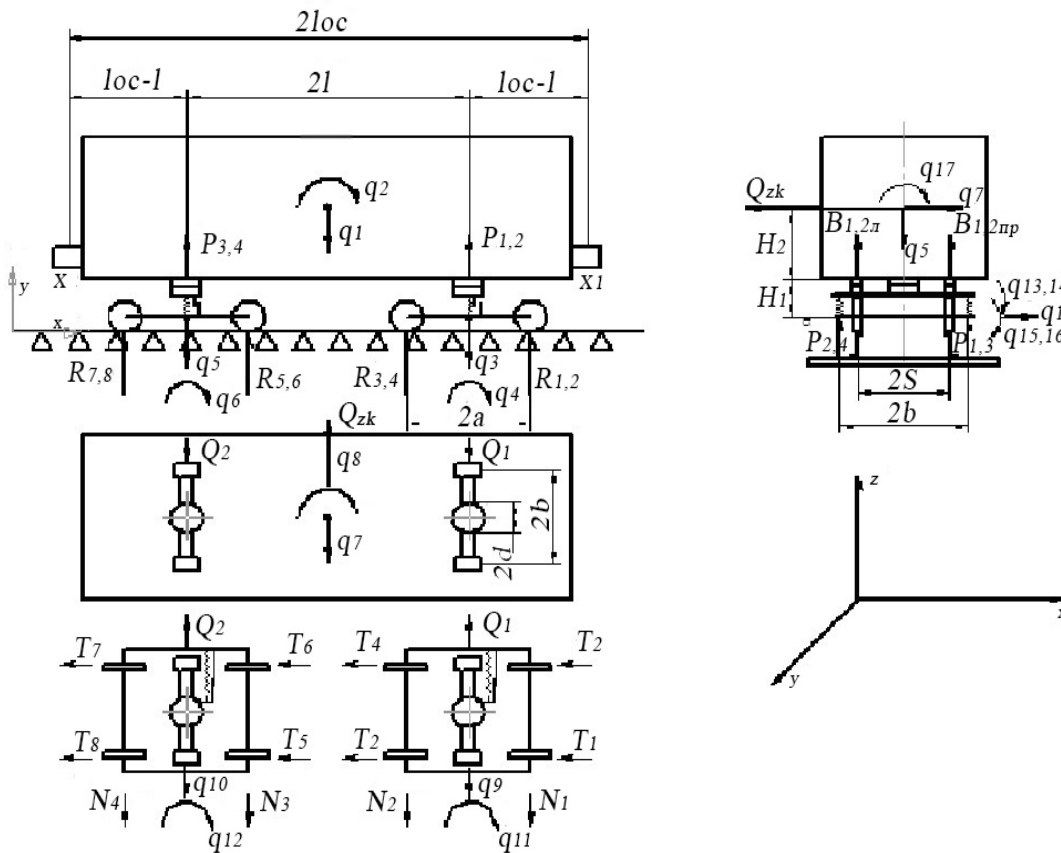


Рис. 1. Розрахункова схема чотиривісного екіпажа

$$\left. \begin{aligned}
 &1) M\ddot{q}_1 + R_1 + P_2 + P_3 + P_4 = M_g \\
 &2) I_{ZK} \cdot \ddot{q}_2 + \ell(P_1 + P_2) - \ell(P_3 + P_4) = 0 \\
 &3) m_T \cdot \ddot{q}_3 - R_1 - P_2 = m_T g - R_1 - R_2 - R_3 - R_4 \\
 &4) I_{ZT} \cdot q_4 + m_T(\ddot{q}_3 - g) \cdot d \operatorname{sign}(q_4 - q_2) = a(R_3 + R_4) - a(R_1 + R_2) \\
 &5) m_T \cdot \ddot{q}_5 - P_3 - P_4 = m_T \cdot g - R_5 - R_6 - R_7 - R_8 \\
 &6) I_{ZT} \cdot \ddot{q}_6 + m_T(\ddot{q}_5 - g) \cdot d \operatorname{sign}(q_6 - q_2) = a(R_7 + R_8) - a(R_5 - R_6) \\
 &7) M\ddot{q}_7 + Q_1 + Q_2 = M \frac{V^2}{\rho_{xos}} + Q_{ZK} - Q_{hk} \\
 &8) I_{YT} \cdot \ddot{q}_8 + Q_1 \cdot \ell - Q_2 \cdot \ell + M_{TP1} \operatorname{sign}(\dot{q}_8 - \dot{q}_{10}) + M_{TP2} \operatorname{sign}(\dot{q}_8 - \dot{q}_{12}) = 0 \\
 &9) m_T \cdot \ddot{q}_9 - Q_1 = m_T \frac{V^2}{\rho_{XT1}} - N_1 - N_2 - Q_{hT1} \\
 &10) I_{YT} \cdot \ddot{q}_{10} + M_{TP1} \operatorname{sign}(\dot{q}_{10} - \dot{q}_8) = M_{n1} + M_{n2} + (N_2 - N_1) \cdot a \\
 &11) m_T \cdot \ddot{q}_{11} - Q_2 = m_T \frac{V^2}{\rho_{XT2}} - N_3 - N_4 - Q_{hT2} \\
 &12) I_{YT} \cdot \ddot{q}_{12} + M_{TP2} \operatorname{sign}(\dot{q}_{12} - \dot{q}_8) = M_{n3} + M_{n4} + (N_4 - N_3) \cdot a \\
 &13) I_{dX} \cdot \ddot{q}_{13} + P_{T1} \cdot d \operatorname{sign}(q_{13} - q_{17}) + (B_{1л} - B_{1np}) \cdot \epsilon_1 + (P_1 - P_2) \cdot \epsilon = 0 \\
 &14) I_{dX} \cdot \ddot{q}_{14} + P_{T2} \cdot d \operatorname{sign}(q_{14} - q_{17}) + (B_{2л} - B_{2np}) \cdot \epsilon_1 + (P_3 + P_4) \cdot \epsilon = 0 \\
 &15) I_{TX} \cdot \ddot{q}_{15} + (P_2 - P_1) \cdot \epsilon - Q_1 \cdot H_1 = R_2 \cdot S_2(t) - R_1 \cdot S_1(t) + R_4 S_4(t) - \\
 &\quad - R_3 \cdot S_3(t) - N_1 r_1(t) - N_2 r_2(t) \\
 &16) I_{TX} \cdot \ddot{q}_{16} + (P_4 - P_3) \cdot \epsilon - Q_2 \cdot H_1 = R_6 \cdot S_6(t) - R_5 \cdot S_5(t) - R_7 S_7(t) + R_8 \cdot S_8(t) - \\
 &\quad - R_7 S_7(t) - N_3 r_3(t) - N_4 r_4(t) \\
 &17) I_{KX} \cdot \ddot{q}_{17} + M \cdot \ddot{q}_7 H_0 + P_{T1} \cdot d \operatorname{sign}(q_{17} - q_{13}) + P_{T2} \cdot d \operatorname{sign}(q_{17} - q_{14}) + \\
 &\quad + (B_{1np} + B_{2np} - B_{1л} - B_{2л}) \cdot \epsilon_1 = M \frac{V^2}{\rho_{xos}} \cdot H_0 + Q_{ZK} \cdot H_0
 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

**Вертикальні силові і кінематичні зв'язки підсистем «екіпаж» і «колія»**

У розрахунковій схемі системи «екіпаж – колія» прийнято, що залізнична колія у вертикальній площині

має пружно-дисипативні властивості. Тоді вертикальні реакції рейки під колесами за наявності в колії деформуючих сил тертя і однобічного зв'язку колеса і рейки можна визначити:

$$\left. \begin{aligned}
 R_{1-8} &= C_\epsilon (\delta_{zcc} + \delta_{z1-8}) + \beta_\epsilon (\delta_{z1-8}) \cdot \operatorname{sign} \dot{\delta}_{z1-8} \text{ при } (\delta_{zcc} + \delta_{z1-8}) \geq 0 \\
 R_{1-8} &= 0 \text{ при } (\delta_{zcc} + \delta_{z1-8}) < 0
 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

де  $C_\epsilon$  – приведена вертикальна жорсткість рейкової нитки під колесом,  $H/m$ ;

$\beta_\epsilon$  – коефіцієнт дисипації конструкції колії у вертикальній площині  $\left(\frac{H \cdot c}{m}\right)$ ;

$\delta_{zcc}$  – статичне прогинання рейки під колесом,  $m$ ;

$\delta_{z1-8}$  – динамічні деформації колії під колесами у вертикальній площині,  $m$ .

Деформації колії у вертикальній площині визначаються таким виразом,  $m$ :

$$\delta_{z1-8} = q_{3,5} \pm q_{4,6} \cdot a \pm q_{15,16} S_{1-8}(t) + \Delta r_{1-8} - \eta_{\text{нерз}1-4}, \quad (3)$$

де  $S_{1-8}(t)$  – відстані від середини колісних пар до точок передачі вертикальних навантажень від коліс на рейки, м;

$\Delta r_{1-8}$  – зміна радіуса в точці контакту колеса з рейкою щодо радіуса середнього круга катання, м;

$\eta_{\text{нерз}1-4}$  – вертикальні геометричні нерівності колії під кожною колісною парою, м.

### Висновки з дослідження і перспективи, подальший розвиток у даному напрямку

Було розв'язано такі задачі:

1. На підставі всебічного аналізу науково-дослідницької літератури в галузі взаємодії рухомого складу з верхньою будовою колії метрополітену було сформульовано основні вимоги і розроблено розрахункову схему динамічної системи «екіпаж-колія» (див. рис. 1).

2. За результатами було розроблено математичну модель системи «екіпаж-колія», яка може застосовуватися для широкого кола досліджень (формула 1)).

3. Необхідним продовженням цього дослідження стало розроблення алгоритмів і програм для розрахунків потрібних показників (у програмному середовищі «Москад») експлуатаційного ресурсу колії метрополітену.

### Список використаних джерел

1. Вольнец, В. П. Экспериментальное исследование горизонтальных поперечных жесткостей рельсовых нитей при разных типах скрепления [Текст] / В. П. Вольнец // Вісник ДНУЗТ. – 2015. – № 6. – С. 57-60.
2. Мямлин, С. В. Математическая модель колебаний колесной пары с независимым вращением колес в горизонтальной плоскости [Текст] / С. В. Мямлин, О. А. Кирильчук, В. С. Метиженко // Вісник ДНУЗТ. – 2016. – № 4.
3. Йосифович, Р. М. Дослідження залишкового ресурсу дефектних рейок типу Р 50 із випробуваннями на циклічну витривалість у метрополітенах [Текст] / О. В. Огарков, Р. М. Йосифович // Вісник ДНУЗТ. – 2015. – № 6. – С. 78-84.
4. Даренский, А. Н. Результаты определения пространственных неупругих сопротивлений железнодорожного пути деформациям для условий промышленного транспорта [Текст] / А. Н. Даренский // ІКСЗТ. – 2010. – № 6. – С. 78-82.

5. Коган, А. Я. Об основных параметрах, определяющих устойчивое движение экипажей [Текст] / А. Я. Коган, И. В. Полищук // Вестник ВНИИЖТ. – 2005. – № 2. – С.4-6.
6. Коган, А. Я. Определение относительной скорости неупругого скольжения колеса по рельсу [Текст] / А. Я. Коган, Э. Д. Загитов // Вестник ВНИИЖТ. – 2006. – № 6. – С.19-21.
7. Bogacz, R. On new effects of wheel-rail interaction [Text] /R. Bogacz, R. Konowrocki //Archive of Applied Mechanics. – 2012. – Т. 82. – №. 10–11. – P. 1313–1323.
8. Kaiyun Wang, Chao Huang, Wanming Zhai, Pengfei Liu, Shen Wang. (2014). Progress on wheel-rail dynamic performance of railway curve negotiation. Journal of Traffic and Transportation Engineering (English Edition), 1, P. 209–220.
9. Dailydka, S. Modelling the interaction between railway wheel and rail/ [Text] J. Sadeghi, S. Shoja, //Transport. – 2008. – Т. 23. – №. 3. – P. 236–239.
10. Otero, J. A mathematical model to study railway track dynamics for the prediction of vibration levels generated by rail vehicles/ [Text] J. Otero, M. A. Martínez, de los Santos, S. Cardona //Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit. – 2011. – P. 62-71.

**А. Н. Даренский, А. С. Малишевская.**  
**Математическая модель системы «экипаж-путь» для условий метрополитена.** С учетом специфических особенностей работы путей метрополитена предложена математическая динамическая система «экипаж – путь». Подсистема экипаж представлена как структура, состоящая из твердых недеформированных элементов кузов – тележка – колёсные пары, которые соединены между собой системой шарниров (шкворни) упругих (рессоры) и демпфирующих (гасители колебаний) элементов. Представлена математическая модель колебаний элементов этой подсистемы.

Рассмотрены вертикальные кинематические и силовые связи подсистемы «путь» и «экипаж».

Силовые связи подсистемы «экипаж» и «путь» рассмотрены с учётом возможности возникновения упругих и диссипативных сил. Математически реализовано важное положение о том, что колёса вагона метрополитена и поверхности катания головок рельсов имеют одностороннюю связь. Такое положение предполагает использование в дальнейшем расчётной схемы пути как балки, на упруго-диссипативных опорах.

**Ключевые слова:** динамическая система «экипаж – путь», текущий ресурс верхнего строения пути.

---

**A. N. Darenskiy, A. S. Malishevskaya. A mathematical model of the system "crew-path" to the minds of the underground.** Taking into account the specific features of the subway tracks a mathematical dynamical system "crew - a way." Subsystem crew is presented as a structure consisting of a non-deformed solid body component - cart - wheel pairs are connected by a system of hinges (pins) of the elastic (spring) and damping (shock absorbers) elements. Provided mathematical model, of oscillations of elements of this subsystem.

Considered vertical kinematic and power communication subsystem "path" and "crew".

Power communication subsystem "crew" and "path" reviewed, taking into account the possibility of elastic and dissipative forces. Mathematically it realized the importance of the position that the wheels of the subway car and the rail head running surface have a one-way communication. This situation involves the use of further design scheme as the path of the beam on elastic-dissipative supports.

**Keywords:** dynamic system "carriage -path", current resource top structure of a way.

*Надійшла 31.10.2016 р.*

*Даренський Олександр Миколайович, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри «Колія та колійне господарство» Українського державного університету залізничного транспорту, пл. Фейєрбаха, 7, м. Харків, Україна, 61015. E-mail: [ppx\\_xiit@kart.edu.ua](mailto:ppx_xiit@kart.edu.ua)*

*Малішевська Аліна Сергіївна, аспірант, кафедра «Колія та колійне господарство», Український державний університет залізничного транспорту пл. Фейєрбаха, 7, м. Харків, Україна, 61015. E-mail: [kttolik@yandex.ua](mailto:kttolik@yandex.ua)*

*Darenskiy Alexander, PhD, Dr. Sc. Professor, Head of Department of track and track facilities of Ukrainian State University of Railway Transport, Feierbakh Square 7, 61050, Kharkiv, Ukraine. E-mail: [ppx\\_xiit@kart.edu.ua](mailto:ppx_xiit@kart.edu.ua)*

*Malishevskaya Alina, postgraduate, department of track and track facilities, Ukrainian State University of Railway Transport, Feierbakh Square 7, 61050, Kharkiv, Ukraine. E-mail: [kttolik@yandex.ua](mailto:kttolik@yandex.ua)*