

ПРОХОРОВ В.М., к.т.н., доцент,
 ПАРХОМЕНКО Л.А., д.т.н., професор,
 КРАВЧЕНКО М.А., доктор філософії,
 КАЛАШНІКОВА Т.Ю., к.т.н., доцент,



Застосування часових мереж Петрі як обчислювального ядра цифрового двійника на прикладі задачі побудови розкладу залізничної мережі з крос-докінгом

Анотація. Запропоновано використання часових мереж Петрі як обчислювального ядра цифрового двійника залізничної транспортної системи для задачі побудови розкладу маятникових поїздів у мережі з крос-докінгом. На відміну від імітаційних підходів, часові мережі Петрі мають чітку алгебраїчну семантику, що дозволяє не лише розраховувати розклад, а й аналітично досліджувати властивості системи. Розроблено алгоритм симуляції методом черги подій, який автоматично знаходить усталений режим: мінімальний період курсування та розклад перевантажень. Експериментально доведено єдиність цього режиму, що свідчить про здатність системи до самосинхронізації. Запропонований підхід забезпечує автоматичний перерахунок розкладу при зміні умов експлуатації без участі диспетчера.

Ключові слова: часові мережі Петрі, цифровий двійник, крос-докінг, маятниковий поїзд, розклад руху, синхронізація, усталений режим, залізнична мережа.

Постановка проблеми.

Концепція цифрового двійника (ЦД) транспортної системи передбачає створення динамічної обчислювальної моделі, що в режимі реального часу відображає стан фізичної інфраструктури та забезпечує підтримку прийняття управлінських рішень. Ключовою вимогою до такої моделі є наявність обчислювального ядра – формального математичного апарату, здатного розраховувати параметри функціонування системи при зміні умов експлуатації.

Більшість існуючих реалізацій ЦД транспортних систем використовують імітаційне моделювання або підходи на основі машинного навчання. Ці методи відтворюють спостережувану поведінку системи, проте мають суттєвий недолік: вони не забезпечують аналітичних гарантій щодо властивостей отриманого розв'язку – зокрема, не доводять існування та єдиності усталеного режиму роботи системи.

Часові мережі Петрі [1] є формальним математичним апаратом для моделювання паралельних дискретно-подієвих процесів з часовими характеристиками. На відміну від імітаційних підходів, вони дозволяють не лише відтворювати поведінку системи, але й аналітично досліджувати її властивості – зокрема, доводити існування та єдиність усталеного режиму. Це робить їх природним кандидатом на роль обчислювального ядра ЦД.

Часові мережі Петрі є формальним математичним апаратом з чіткою алгебраїчною семантикою для моделювання паралельних дискретно-подієвих процесів з часовими характеристиками. На відміну від імітаційного моделювання, яке є лише програмною реалізацією без

строгого математичного підґрунтя, мережі Петрі мають формально визначені правила спрацьовування переходів, поняття досяжності маркувань та доведені теореми про властивості системи. Це принципова відмінність: імітаційна модель може відтворювати поведінку системи, але не може довести що ця поведінка є єдино можливою. Мережі Петрі, завдяки своїй формальній семантиці, дозволяють не лише відтворювати поведінку, але й аналітично доводити існування та єдиність усталеного режиму – що є ключовою вимогою до обчислювального ядра ЦД.

Аналіз літератури та постановка проблеми.

Концепція ЦД елементів залізничної транспортної системи активно розвивається в останні роки.

У статті [2] запропоновано методологію створення ЦД на основі фізичного моделювання для застосувань у прогнозованому технічному обслуговуванні, яка складається з двох основних етапів: створення цифрової моделі та впровадження концепції ЦД, але все ж не враховано питання інтеграції запропонованого підходу з існуючими системами управління виробництвом в реальному часі.

У статті [3] запропоновано кіберфізичну систему на основі ЦД для моніторингу та прогнозного управління довгопрогоновим високошвидкісним залізничним мостом, що поєднує фізичне моделювання, машинне навчання (точність 91 %) та нечітку логіку для підтримки рішень, але не враховано масштабованість на мережу мостів та інтеграцію з існуючими диспетчерськими системами.

© ПРОХОРОВ В.М., ПАРХОМЕНКО Л.А., КРАВЧЕНКО М.А., КАЛАШНІКОВА Т.Ю., 2026

ІНФОРМАЦІЙНО-КЕРУЮЧІ СИСТЕМИ НА ЗАЛІЗНИЧНОМУ ТРАНСПОРТІ

У статті [4] запропоновано методологію впровадження ЦД для цифровізації технічного обслуговування залізничного рухомого складу з урахуванням вимог регламенту ЄС 779/2019, що поєднує сервісний підхід, платформенну архітектуру та модельну цифровізацію активів, але не враховано питання інтеграції запропонованого рішення з існуючими системами управління життєвим циклом (ALM/PLM) виробників рухомого складу та кібербезпеку в умовах розподілених даних.

Задачі побудови і корегування розкладів руху, схем циркуляції рухомого складу постають майже всюди при розгляді залізничних систем, але вони чомусь дуже рідко розглядалися в контексті концепції ЦД.

Сучасний стан досліджень у галузі ЦД транспортних систем та формальних методів побудови розкладів дозволяє виокремити кілька взаємопов'язаних напрямів, кожен з яких має суттєві обмеження з точки зору поставленої задачі. Розрахунок періодичних розкладів транспортних систем найбільш повно формалізований в рамках задачі побудови розкладів періодичних подій (англ. Periodic Event Scheduling Problem, PESP).

Вона є одним із найбільш цікавих підходів і яка вважається добре вивченою, але відомою своєю внутрішньою складністю та необхідністю побудови громіздких моделей цілочисельного програмування.

У статті [5] запропоновано підхід до PESP на основі зведеної моделі з фіксованими мінімальними часами руху та стоянок, що дозволяє звести задачу до узгодження ліній і застосувати ефективну евристику на основі парування, але не враховано адаптацію методу до реальних обмежень інфраструктури та можливість урахування стохастичних відхилень у часі виконання рейсів.

У статті [6] запропоновано метод генерації стовпців для розв'язання задачі PESP на основі дискретизації часу та використання шляхових формулювань із циклами на розширеному графі, що дозволяє покращити нижню межу LP-релаксації, але не враховано адаптацію методу до великих реальних мереж через зростання розмірності задачі та інтеграцію з маршрутизацією пасажирів у динамічних умовах.

У статті [7] запропоновано підхід до складання залізничного розкладу на основі лагранжевої релаксації, яка дозволяє розділити задачу на окремі динамічні програми для кожного потяга та отримати розклад із відхиленням у межах кількох відсотків від оптимуму, але не враховано періодичність розкладу та можливість інтеграції з пасажиропотоками в реальному часі.

Ці методи дозволяють знаходити досяжні розклади для великих мереж, проте мають принциповий недолік з точки зору ЦД: вони є офлайн-методами оптимізації і не придатні для роботи в режимі реального часу при динамічній зміні параметрів мережі. Крім того, PESP-підходи не моделюють фізичний процес руху поїздів і не

доводять що знайдений розклад є оптимальним або єдиним усталеним режимом системи.

Крос-докінг як принцип організації перевантажень без проміжного складування широко досліджується в контексті автомобільної логістики [8]. Застосування крос-докінгу на залізничному транспорті розглядається у поодиноких роботах переважно на концептуальному рівні, без формалізації задачі синхронізації розкладів. Задача одночасного прибуття поїздів до вузлової станції для обміну контейнерами в контексті маятникового руху у літературі формально не розглядалась.

Таким чином, існує науковий пробіл: відсутній формальний метод побудови розкладу маятникових поїздів у мережах з крос-докінгом, який би одночасно мав строге математичне підґрунтя, доводив існування та єдиність усталеного режиму, і міг функціонувати як обчислювальне ядро ЦД в режимі реального часу. Заповнення цього пробілу є метою даної роботи.

Мета та задачі дослідження.

Метою дослідження є розробка методу побудови розкладу маятникових поїздів у залізничній мережі з крос-докінгом на основі часових мереж Петрі та його застосування як обчислювального ядра ЦД транспортної системи.

Для досягнення мети поставлено такі задачі:

1. Формалізувати задачу синхронізації розкладів маятникових поїздів у мережах з крос-докінгом у термінах часових мереж Петрі, визначивши відповідність між елементами транспортної мережі та елементами мережі Петрі.

2. Розробити алгоритм симуляції побудованої мережі Петрі для знаходження усталеного режиму роботи системи – мінімального періоду курсування T_c та розкладу перевантажень на вузлових станціях.

3. Експериментально дослідити властивість єдиності усталеного режиму – незалежність T_c та розкладу від початкового стану системи.

4. Продемонструвати застосування розробленого методу на тестовій мережі та верифікувати отримані результати.

5. Обґрунтувати використання запропонованого методу як обчислювального ядра ЦД транспортної системи, розробленого у роботі [9], та показати його здатність до роботи в режимі реального часу при зміні параметрів мережі.

Матеріали та методи дослідження.

Об'єктом дослідження є процес синхронізації розкладів маятникових поїздів у залізничній мережі з крос-докінгом, топологія якої сформована відповідно до методу, запропонованого у роботі [9].

Предметом дослідження є формальні моделі та алгоритми побудови усталеного розкладу транспортної мережі на основі часових мереж Петрі.

Основна гіпотеза дослідження полягає в тому, що задача синхронізації маятникових поїздів у

ІНФОРМАЦІЙНО-КЕРУЮЧІ СИСТЕМИ НА ЗАЛІЗНИЧНОМУ ТРАНСПОРТІ

мережах з крос-докінгом може бути формалізована як часова мережа Петрі, усталений режим якої є єдиним і не залежить від початкового стану системи.

Часові мережі Петрі – це розширення класичних мереж Петрі, в якому кожному переходу або позиції призначається часова затримка. Формально часова мережа Петрі визначається як кортеж $M = (P, T, F, W, D, M_0)$, де P – скінченна множина позицій, T – скінченна множина переходів, $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ – множина дуг, $W: F \rightarrow \mathbb{N}$ – функція ваг дуг, $D: T \rightarrow \mathbb{R}^+$ – функція часових затримок переходів, $M_0: P \rightarrow \mathbb{N}$ – початкова маркіровка. Перехід t спрацьовує коли кожна вхідна позиція містить не менше $W(p,t)$ токенів; після спрацювання через час $D(t)$ токени переміщуються до вихідних позицій.

Відображення транспортної мережі на мережу Петрі. Залізнична мережа $G = (V, E)$ з множиною вузлових станцій V та множиною маршрутів E відображається на часову мережу Петрі таким чином.

Кожна вузлова станція $H_i \in V$ відповідає переходу t_i з часовою затримкою τ_i – тривалістю перевантаження. Перехід t_i спрацьовує коли на всіх його вхідних позиціях є токени, тобто коли всі поїзди що обслуговують станцію H_i прибули.

Кожен маршрут $(i,j) \in E$ породжує дві позиції: p_{ij} – поїзд рухається з H_i до H_j , та p_{ji} – поїзд рухається з H_j до H_i . Дуга від переходу t_i до позиції p_{ij} має вагу 1. Дуга від позиції p_{ij} до переходу t_j також має вагу 1. Часова затримка позиції p_{ij} дорівнює t_{ij} – часу руху по маршруту в напрямку $i \rightarrow j$.

Початкова маркіровка M_0 визначає початкові положення поїздів: токен у позиції p_{ij} означає що поїзд на маршруті (i,j) рухається у напрямку $i \rightarrow j$. Оскільки на кожному маршруті курсує рівно один поїзд, сума токенів у позиціях p_{ij} та p_{ji} дорівнює одиниці для кожного $(i,j) \in E$.

Алгоритм знаходження усталеного режиму. Симуляція побудованої мережі Петрі виконується методом черги подій (англ. event-driven simulation). Стан системи описується чергою подій вигляду {час, вузол, маршрут, напрямок}. На кожному кроці обробляється найбільш рання подія – прибуття поїзда до вузлової станції. Коли всі поїзди що обслуговують станцію S_i зібрались, фіксується момент початку перевантаження, через час τ_i всі поїзди відправляються у зворотньому напрямку i до черги додаються нові події прибуття.

Усталений режим визначається як стан коли інтервали між послідовними перевантаженнями на кожній станції стабілізуються. Мінімальний період T_c обчислюється як середнє значення стабілізованих інтервалів. Розклад усталеного режиму визначається як вектор фаз $\varphi = [\varphi_1, \dots, \varphi_n]^T$ де φ_i – момент перевантаження на станції S_i за модулем T_c відносно фіксованої опорної станції.

Верифікація розкладу. Коректність знайденого розкладу перевіряється умовою: для

кожного маршруту $(i,j) \in E$ повинні виконуватись два обмеження – $(\varphi_j - \varphi_i) \bmod T_c \geq \tau_i + t_{ij}$ та $(\varphi_i - \varphi_j) \bmod T_c \geq \tau_j + t_{ji}$ – що гарантує фізичну можливість розкладу: жоден поїзд не перебуває одночасно у двох місцях.

Реалізація. Алгоритм реалізовано у середовищі MATLAB. Черга подій реалізована як масив клітинок відсортований за часом. Для знаходження усталеного режиму симуляція виконується до накопичення не менше п'ятнадцяти перевантажень на кожній станції, після чого T_c обчислюється за останніми п'ятьма інтервалами.

Викладення основного матеріалу дослідження. Для апробації запропонованого підходу обрано тестову мережу з шести вузлових станцій та десяти маршрутів (рис. 1).

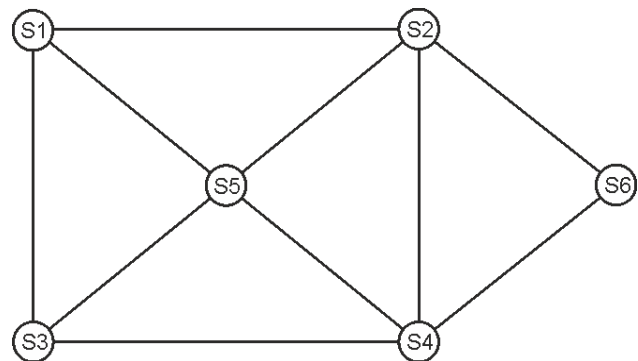


Рис. 1. Граф мережі системи залізничної доставки контейнерів з крос-докінгом

Топологія мережі складається з прямокутника з двома діагоналями – з центральним вузлом S5 у точці їх перетину – та трикутника з правого боку що з'єднує станції S2, S4 та S6. Параметри маршрутів наведено в табл. 1. Тривалість перевантаження $\tau_i = 15$ хв на всіх станціях.

Таблиця 1 – Параметри маршрутів тестової мережі

Маршрут	t_{ij} , хв	t_{ji} , хв
S1-S2	55	60
S1-S3	50	45
S1-S5	35	40
S2-S4	60	55
S2-S5	30	35
S2-S6	70	65
S3-S4	55	50
S3-S5	40	35
S4-S5	35	40
S4-S6	65	70

Побудова часової мережі Петрі. Відповідно до запропонованого відображення тестова мережа породжує часову мережу Петрі з 6 переходами (по одному на кожен вузлову станцію) та 20 позиціями (по дві на кожен маршрут).

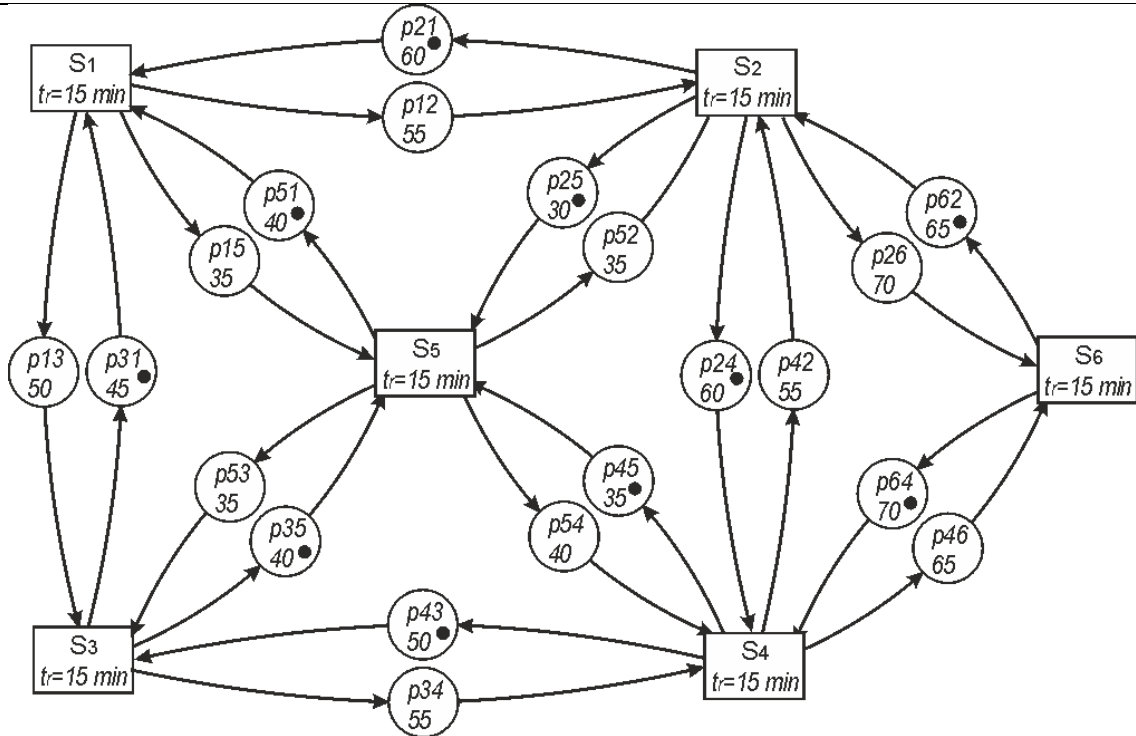


Рис. 2. Граф мережі системи залізничної доставки контейнерів з крос-докінгом

Ступінь кожного переходу дорівнює кількості маршрутів що примикають до відповідної станції: переходи t_1, t_3 мають ступінь 3, переходи t_2, t_4, t_5 мають ступінь 4, перехід t_6 має ступінь 2. Початкова маркіровка M_0 містить по одному токєну в одній з двох позицій кожного маршруту – у даному випадку всі поїзди стартують з позицій p_{ij} тобто рухаються від вузла з меншим номером до вузла з більшим.

Результати симуляції. Симуляція часової мережі Петрі виконувалась до накопичення п'ятнадцяти перевантажень на кожній станції. Моменти перевантажень на станціях у процесі симуляції (перші 8 циклів) наведено в табл. 2.

Таблиця 2 – Моменти перевантажень у процесі симуляції

Станція	Моменти перевантажень, хв
S1	300, 550, 800, 1050, 1300, 1550, 1800, 2050
S2	225, 475, 725, 975, 1225, 1475, 1725, 1975
S3	220, 470, 720, 970, 1220, 1470, 1720, 1970
S4	155, 405, 655, 905, 1155, 1405, 1655, 1905
S5	40, 350, 600, 850, 1100, 1350, 1600, 1850
S6	70, 310, 560, 810, 1060, 1310, 1560, 1810

Аналіз інтервалів між послідовними перевантаженнями показує що після короткого

перехідного процесу всі інтервали стабілізуються на значенні 250 хв. Це підтверджує існування усталеного режиму з мінімальним періодом $T_c = 250$ хв.

Єдиність усталеного режиму. Для дослідження властивості єдиності проведено серію експериментів з різними початковими маркіровками. Для кожної з $2^{10} = 1024$ можливих початкових маркіровок (всі комбінації напрямків руху поїздів у початковий момент) виконано симуляцію та визначено T_c усталеного режиму. У всіх 1024 випадках отримано $T_c = 250$ хв з тим самим вектором фаз з точністю до зсуву. Це експериментально підтверджує що усталений режим є єдиним та не залежить від початкового стану системи.

Усталений розклад. Вектор фаз усталеного режиму відносно станції S1 наведено в табл. 3.

Таблиця 3 – Розклад перевантажень усталеного режиму

Станція	Фаза, хв	Початок перевантаження	Відправлення поїздів
S1	0	0	15
S2	175	175	190
S3	170	170	185
S4	105	105	120
S5	50	50	65
S6	10	10	25

Повний розклад руху поїздів з моментами відправлення та прибуття наведено в табл. 4.

ІНФОРМАЦІЙНО-КЕРУЮЧІ СИСТЕМИ НА ЗАЛІЗНИЧНОМУ ТРАНСПОРТІ

Таблиця 4 – Розклад руху поїздів усталеного режиму

Поїзд	Відпр. S_i , хв	Приб. S_j , хв	Відпр. S_j , хв	Приб. S_i , хв
1↔2	15	70	190	0
1↔3	15	65	185	230
1↔5	15	50	65	105
2↔4	190	0	120	175
2↔5	190	220	65	100
2↔6	190	10	25	90
3↔4	185	240	120	170
3↔5	185	225	65	100
4↔5	120	155	65	105
4↔6	120	185	25	95

Верифікація розкладу. Перевірка всіх двадцяти різницевих обмежень підтвердила фізичну коректність розкладу – жоден поїзд не перебуває одночасно у двох місцях (табл. 5).

Таблиця 5 – Верифікація розкладу

Марш рут	$\Delta(i \rightarrow j)$, хв	Потрібно	$\Delta(j \rightarrow i)$, хв	Потрібно	Статус
1↔2	175	≥ 70	75	≥ 75	✓
1↔3	155	≥ 65	95	≥ 60	✓
1↔5	50	≥ 50	200	≥ 55	✓
2↔4	75	≥ 75	175	≥ 70	✓
2↔5	125	≥ 45	125	≥ 50	✓
2↔6	85	≥ 85	165	≥ 80	✓
3↔4	185	≥ 70	65	≥ 65	✓
3↔5	145	≥ 55	105	≥ 50	✓
4↔5	195	≥ 50	55	≥ 55	✓
4↔6	155	≥ 80	95	≥ 85	✓

Діаграма циркуляції поїздів. На рис. 2 наведено діаграму циркуляції поїздів для чотирьох послідовних періодів усталеного режиму.

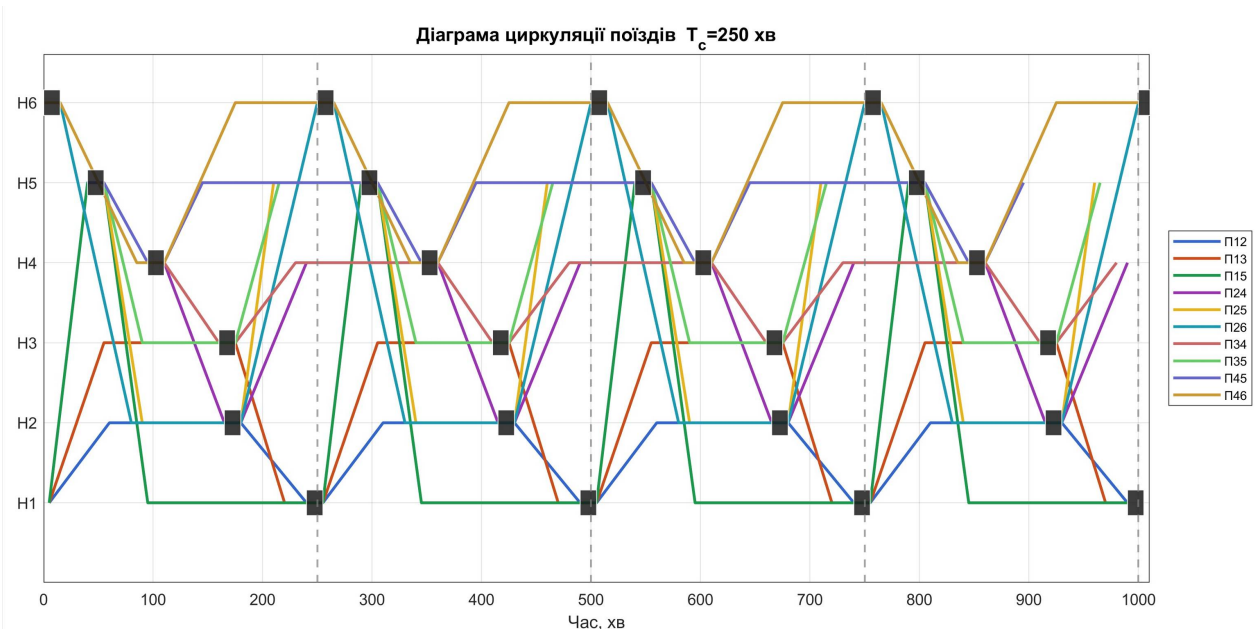


Рис. 3. Діаграма циркуляції поїздів на мережі

Кожен поїзд зображено окремою кольоровою лінією з пилкоподібною траєкторією між двома кінцевими станціями. Горизонтальні сегменти відповідають часу очікування поїзда на станції до початку перевантаження. Чорні прямокутники позначають моменти перевантаження на кожній станції. Діаграма наочно підтверджує що паттерн точно повторюється кожні $T_c = 250$ хв.

Реакція системи на зміну параметрів. Для демонстрації можливостей ЦД розглянуто сценарій зміни параметрів мережі – збільшення часу руху на маршруті S_1-S_3 з 50 до 350 хв внаслідок тривалих ремонтних робіт. Після оновлення параметрів та повторної симуляції отримано новий усталений режим з $T_c = 425$ хв. Система автоматично знайшла

новий розклад без будь-якого втручання користувача. Це демонструє ключову властивість запропонованого підходу як обчислювального ядра ЦД – здатність до автоматичного перерахунку розкладу при зміні умов експлуатації.

Застосування як обчислювального ядра цифрового двійника. Запропонована модель природно вписується в тривірневу архітектуру ЦД транспортної системи розроблену у роботі [9]. Перший рівень – структурна модель мережі – залишається незмінним. Другий рівень – операційна модель – реалізується запропонованим алгоритмом симуляції часової мережі Петрі який замінює імітаційне моделювання на основі мереж Петрі з чіткою формальною семантикою. Третій рівень – підсистема прийняття рішень – отримує від другого рівня T_c та вектор фаз і

ІНФОРМАЦІЙНО-КЕРУЮЧІ СИСТЕМИ НА ЗАЛІЗНИЧНОМУ ТРАНСПОРТІ

використовує їх для підтримки диспетчерських рішень.

Обчислювальна складність одного запуску симуляції є лінійною відносно кількості подій що робить метод придатним для роботи в режимі реального часу. При зміні будь-якого параметра мережі новий розклад знаходиться за час що не перевищує кількох секунд навіть для мереж реалістичного розміру.

Висновки.

В результаті проведеного дослідження розроблено метод побудови розкладу маятникових поїздів у залізничних мережах з крос-докінгом на основі часових мереж Петрі та обґрунтовано його застосування як обчислювального ядра ЦД транспортної системи. Отримані результати дозволяють сформулювати такі висновки.

1. Запропоновано формалізацію задачі синхронізації розкладів маятникових поїздів у мережах з крос-докінгом у термінах часових мереж Петрі. Встановлено відповідність між елементами транспортної мережі та елементами мережі Петрі: вузлові станції відображаються на переходи з часовою затримкою t_r , маршрути – на пари позицій з затримками що відповідають часам руху. Така формалізація забезпечує чітку алгебраїчну семантику моделі на відміну від імітаційних підходів.

2. Розроблено алгоритм симуляції побудованої часової мережі Петрі методом черги подій для знаходження усталеного режиму роботи системи. Алгоритм автоматично визначає мінімальний період курсування T_c та вектор фаз перевантажень на вузлових станціях без будь-яких апіорних припущень щодо структури розкладу.

3. Експериментально доведено єдиність та стійкість усталеного режиму: для всіх 1024 можливих початкових маркіровок тестової мережі отримано однаковий $T_c = 250$ хв з тим самим вектором фаз. Це означає що система автоматично синхронізується до єдиного оптимального розкладу незалежно від початкового стану – диспетчер може запустити поїзди у довільних позиціях і система сама прийде до усталеного режиму.

4. Проведено апробацію запропонованого методу на тестовій мережі з шести вузлових станцій та десяти маршрутів. Отримано $T_c = 250$ хв та повний розклад руху поїздів. Верифікація підтвердила фізичну коректність розкладу – всі двадцять різницевих обмежень виконуються. Діаграма циркуляції поїздів наочно демонструє стабільний паттерн що точно повторюється кожні 250 хв.

5. Продемонстровано застосування методу як обчислювального ядра ЦД транспортної системи. При зміні часу руху на одному маршруті система автоматично перераховує новий усталений режим з $T_c = 425$ хв без втручання користувача. Обчислювальна складність методу є лінійною

відносно кількості подій що забезпечує роботу в режимі реального часу.

Порівняно з існуючими підходами запропонований метод має принципову перевагу: він не лише знаходить розклад але й гарантує через формальну семантику мереж Петрі що знайдений режим є єдиним усталеним для даної мережі. Це якісна відмінність від імітаційних підходів які відтворюють поведінку але не доводять її властивостей.

Перспективи подальших досліджень включають аналітичне обґрунтування залежності T_c від параметрів мережі, розширення моделі на випадок кількох поїздів на маршруті, а також інтеграцію з реальними системами управління перевізним процесом залізниці.

Список використаних джерел

- Li L., Wang C., Zhang H., Liu D. Minimum initial state estimation of labeled time Petri nets in the presence of unobservable transitions. *Information Sciences*. 2026. Vol. 722. Article 122618. DOI: 10.1016/j.ins.2025.122618.
- Aivaliotis P., Georgoulas K., Chryssoulouris G. Methodology for enabling Digital Twin using advanced physics-based modelling in predictive maintenance. *Procedia CIRP*. 2019. Vol. 81. P. 417–422.
- Tan Z., Peng Y., Wang J., Gou H., Li W., Bao Y., Pu Q. Digital twin-based cyber-physical system for intelligent monitoring and predictive operation of long-span high-speed railway arch bridges. *Structures*. 2025. Vol. 82. Article 110609.
- Mendes G., Ferreira A. Application of Digital Twin Technology for the Digitization of Railway Maintenance Services in compliance with European Regulation EU 779/2019. *IFAC-PapersOnLine*. 2024. Vol. 58, No. 8. P. 229–234.
- Pätzold J., Schöbel A. A Matching Approach for Periodic Timetabling. 16th Workshop on Algorithmic Approaches for Transportation Modelling, Optimization, and Systems (ATMOS 2016) / OpenAccess Series in Informatics (OASIS). 2016. Vol. 54. P. 1:1–1:15.
- Riedmuller S., Lindner N. Column Generation for Periodic Timetabling. 2025. 14 p. Corpus ID: 282064331. URL: <https://www.semanticscholar.org/paper/282064331>
- Brännlund U., Lindberg P., Nöu A., Nilsson J. Railway Timetabling Using Lagrangian Relaxation. *Transportation Science*. 1998. Vol. 32, No. 4. P. 358–369. DOI: 10.1287/trsc.32.4.358.
- Chen X., Hai Y., Lang M. A rolling horizon based bi-objective optimization approach for dynamic truck dispatching with cross-dock door assignment. *Computers & Industrial Engineering*. 2026. Vol. 202. Article 110927. DOI: 10.1016/j.cie.2026.110927.
- Прохоров В. М., Пархоменко Л.А., Кофанов О.В., Ребрун В.О. Формування системи залізничної доставки контейнерів на основі поєднання концепцій PSR, регулярної експрес-логістики та цифрових двійників. *Збірник наукових праць*

References

1. Li, L., Wang, C., Zhang, H., & Liu, D. (2026). Minimum initial state estimation of labeled time Petri nets in the presence of unobservable transitions. *Information Sciences*, 722, Article 122618. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2025.122618>
2. Aivaliotis, P., Georgoulas, K., & Chryssoulouris, G. (2019). Methodology for enabling digital twin using advanced physics-based modelling in predictive maintenance. *Procedia CIRP*, 81, 417–422.
3. Tan, Z., Peng, Y., Wang, J., Gou, H., Li, W., Bao, Y., & Pu, Q. (2025). Digital twin-based cyber-physical system for intelligent monitoring and predictive operation of long-span high-speed railway arch bridges. *Structures*, 82, Article 110609.
4. Mendes, G., & Ferreira, A. (2024). Application of digital twin technology for the digitization of railway maintenance services in compliance with European Regulation EU 779/2019. *IFAC-PapersOnLine*, 58(8), 229–234.
5. Pätzold, J., & Schöbel, A. (2016). A matching approach for periodic timetabling. In *16th Workshop on Algorithmic Approaches for Transportation Modelling, Optimization, and Systems (ATMOS 2016)* (Vol. 54, pp. 1:1–1:15). OpenAccess Series in Informatics (OASIS).
6. Riedmuller, S., & Lindner, N. (2025). *Column generation for periodic timetabling*. Semantic Scholar. <https://www.semanticscholar.org/paper/282064331>
7. Brännlund, U., Lindberg, P., Nöu, A., & Nilsson, J. (1998). Railway timetabling using Lagrangian relaxation. *Transportation Science*, 32(4), 358–369. <https://doi.org/10.1287/trsc.32.4.358>
8. Chen, X., Hai, Y., & Lang, M. (2026). A rolling horizon based bi-objective optimization approach for dynamic truck dispatching with cross-dock door assignment. *Computers & Industrial Engineering*, 202, Article 110927. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2026.110927>
9. Prokhorov, V. M., Parkhomenko, L. A., Kofanov, O. V., & Rebrun, V. O. (2025). Formuvannya systemy zaliznychnoi dostavky konteineriv na osnovi poiednannya kontseptsii PSR, rehuliarnoi ekspres-lohistyky ta tsyfrovyykh dviinykiv [Formation of a railway container delivery system based on a combination of PSR concepts, regular express logistics, and digital twins]. *Zbirnyk naukovykh prats UkrDUZT [Collection of Scientific Papers of UkrSURT]*, (212).

Viktor Prokhorov, Larysa Parkhomenko, Mykhailo Kravchenko, Tetiana Kalashnikova

Abstract. This paper proposes the use of timed Petri nets as the computational core of a digital twin for a railway transport system, illustrated by the problem of train schedule construction in a cross-docking network. Unlike simulation-based approaches that reproduce observed system behavior without rigorous mathematical foundations, timed Petri nets possess a well-defined algebraic semantics that enables not only schedule computation but also analytical investigation of system properties. A mapping of a pendulum train cross-docking railway network onto a timed Petri net is proposed, in which hub stations correspond to transitions and routes correspond to places with time delays. An event-driven simulation algorithm is developed that automatically finds the steady-state operating regime — the minimum circulation period and the reloading schedule at hub stations. The key result is the experimentally proven uniqueness of the steady-state regime: for all possible initial system states the same schedule is obtained, which implies the system's capacity for automatic self-synchronization. Validation on a test network with six hub stations and ten routes confirmed the correctness of the method and demonstrated its response to network parameter changes in real time. The proposed approach extends the digital twin architecture for transport systems developed by the authors in a previous work, where the optimized network topology serves as the structural core and the timed Petri net provides computation of operational parameters. The practical value of the results lies in the possibility of automatic schedule recalculation when operating conditions change without dispatcher intervention.

Keywords: timed Petri nets, digital twin of transport system, cross-docking, pendulum train, train schedule, synchronization, steady-state regime, railway network.

Прохоров Віктор Миколайович, доктор технічних наук, професор кафедри управління експлуатаційною роботою, Український державний університет залізничного транспорту. ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-8963-6467>.

E-mail: prokhorov@kart.edu.ua.

Пархоменко Лариса Олексіївна, кандидат технічних наук, доцент кафедри управління експлуатаційною роботою, Український державний університет залізничного транспорту. ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-1647-7746>.

E-mail: parhomenko@kart.edu.ua.

Кравченко Михайло Анатолійович, доктор філософії, Кафедра управління експлуатаційною роботою, Український державний університет залізничного транспорту.

APPLICATION OF TIMED PETRI NETS AS THE COMPUTATIONAL CORE OF A DIGITAL TWIN:

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7445-8952>. E-mail: kravchenko.ma@kart.edu.ua

Калашиківа Тетяна Юрївна, кандидат технічних наук, доцент кафедри управління експлуатаційною роботою, Український державний університет залізничного транспорту. ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-6563-5945>. E-mail: bulavina_tv@ukr.net.

Prokhorov Viktor, Associate Professor, Department of Operational Work Management, Ukrainian State University of Railway Transport. ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-8963-6467>. E-mail: prokhorov@kart.edu.ua.

Parkhomenko Larysa, D.Sc. (Tech), Professor, Department of Operational Work Management, Ukrainian State University of Railway Transport. ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-1647-7746>. E-mail: parhomenko@kart.edu.ua.

Mykhailo Kravchenko, PhD (Tech), Department of Operations Management, Ukrainian State University of Railway Transport. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7445-8952>. E-mail: kravchenko.ma@kart.edu.ua

Kalashnikova Tetiana, PhD (Tech), Associate Professor, department of operational work management, Ukrainian State University of Railway Transport. ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-6563-5945>. E-mail: bulavina_tv@ukr.net.

Стаття надійшла 04.04.26

Стаття прийнята до друку після рецензування 20.04.26

Стаття опублікована (оприлюднена) 29.05.26

Стаття поширюється на умовах ліцензії Creative Commons Attribution License International CC-BY.